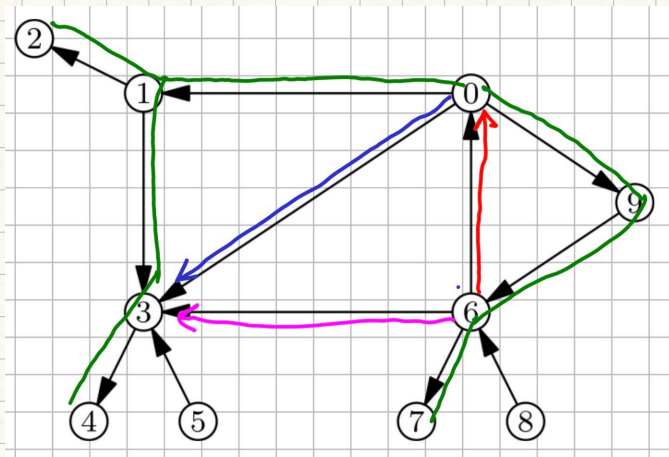


Průběh DFS se dá napsat jako uvažování:

$(0(1(2)_2(3(4)_4)_3)_1(6(7)_7)_6)_9)_0$

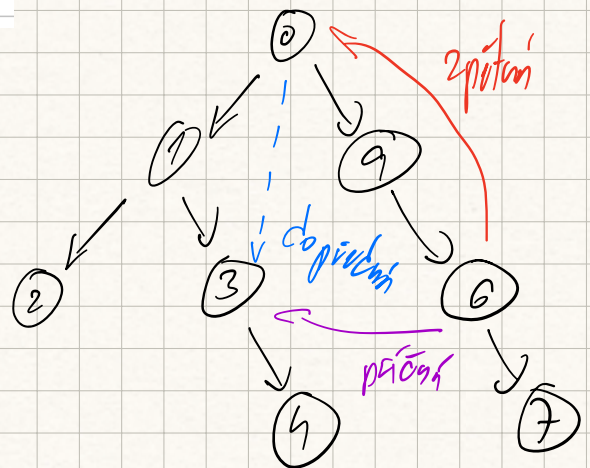
- in/out je levá/pravá závorka



- je to validní uvažování

dobré uvažování odpovídá stromům:

Strom DFS



toto je hashtab grafu

Všechny typy hran $x, y \in E$:

dopřední
zpětní
příčný

(DFS klasifikace)

$(x \dots (y \dots)_y \dots)_x = \text{stromová} \rightarrow y \text{ neobjevené}$
 $= \text{dopřední} \rightarrow y \text{ uzavřeno}$

$(y \dots (x \dots)_x \dots)_y = \text{zpětní}$

$(y \dots)_y \dots (x \dots)_x = \text{příčný}$

$(x \dots)_x \dots (y \dots)_y = \text{nenastane}$

Co když neorientovaný?

poprvé:
stromová
zpětná

podruhé:
zpětná
obpředná

jiné nejsou

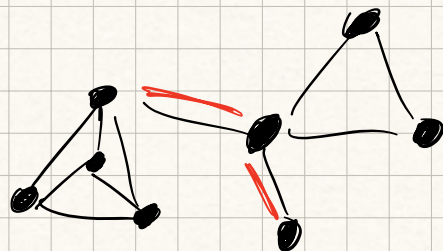
Typ hrany zjistíme v $O(1)$ čase - stačí in/out a starý rozbít.

DFS v čase $\Theta(n+m)$ a prostoru $\Theta(n+m)$ najde
dosazitelné rozbity a klasifikuje dosazitelné hrany.

Hledání mostu v neorientovaných grafech:

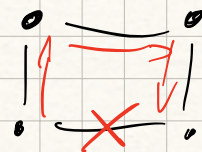
Def: Hrana $e \in E(G)$ je most $\Leftrightarrow$

$G - e$ má více komp. souv.

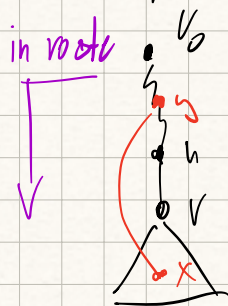


e není most $\Leftrightarrow e \in$ láněnici:

Uložení hrany po smazání z láněnice nezmění dosazitelnost,
jelikož to můžeme po láněnici obejít.



Uložení zpětné láně na láněnici $\Rightarrow$ stačí tedy lookat na stromové hrany.



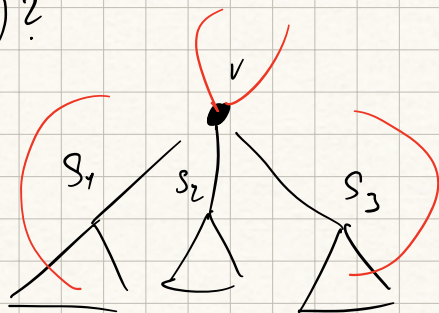
uv láně na láněnici $\Leftrightarrow \exists x, y \in E$ zpětná t.č.

$low(u) < in(u) \Leftrightarrow$

$\left. \begin{array}{l} x \text{ je potomkem } v \\ u \text{ je předkem } v \end{array} \right\} in(x) < in(v)$

DF: $low(v) := \min \{in(y) \mid xy \text{ je zpětná} \& x \text{ neobtě pod } v\}$

Jak počítám $low(v)$?



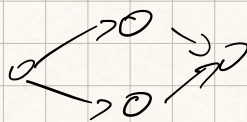
$$low(v) = \min \begin{cases} low(s) \mid s \text{ syn } v \\ in(y) \mid vy \text{ zpětná hrana} \end{cases}$$

trvá $O(deg(v))$

Alg. nalezneme všechny mosty v čase a prostoru $\Theta(n+m)$.

Acyklický orientovaný graf (DAG):

- nemá tedy žádnou zpětnou hranu.



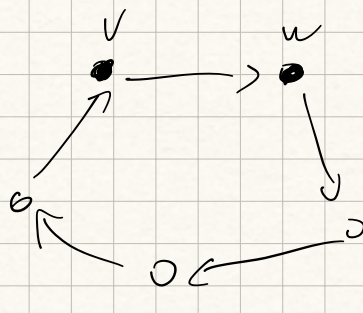
$\exists$ dosahitelný cyklus $\Leftrightarrow$ DFS najde zpětnou hranu.

$\Leftarrow$ triviální

$\Rightarrow$ necht' $\exists$ cyklus C , zvolíme $v \in C$ s min $out(v)$

$w :=$ následník v na cyklu
na hraně vw roste out.

tobto je ale právě
u zpětná hrana.



Pro $\forall v \in V(G)$,
pokud $star(v) =$ neobjeven,
volám DFS2(v)

Topologické uspořádání:

Lineární uspořádání $\leq n \cdot V(G) + z.$

$\forall xy \in E(G): x \leq y$

$\hookrightarrow$ alternativně je to očíslování vrcholů t.j. $\forall i, j \in V: i < j$

cyklus nemá topologické uspořádání

Graf má TV $\Leftrightarrow$ Graf je DAG:

Zdroj: $v \in V$ je zdroj $\Leftrightarrow \deg^{\text{in}}(v) = 0$ [stok = $\deg^{\text{out}}(v) = 0$]

Každý DAG má zdroj.

- Vždy má vchoz. Pokud má vchoz, je to stok, nebo do něj vede nějaká hrana. Pokud vchoz, jen zpět, ať uvažujeme zdroj.

$\Leftarrow$ - Stačí tedy odtrhnout zdroje.

$\Rightarrow$ Viz. výše TV

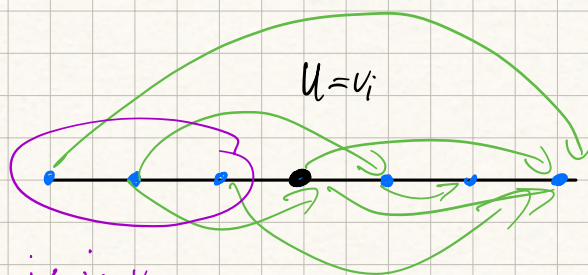
Poradí, v němž DFS opouští vrcholy, je opačný topologický.

jediný, kde
nechceš out,
jsou zpět a ty se vyznačují v DAG.
na hraně klesá out.

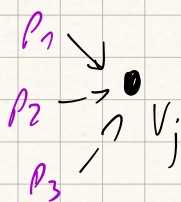
Topologická indukce

Zvolme u , chceme počet cest z u do v . $C(v) := \# \text{cest z } u \text{ do } v$

Nechť $v_1 - v_n$ je topologický pořadí.



$\Rightarrow$ Pro $j > i$, ind.



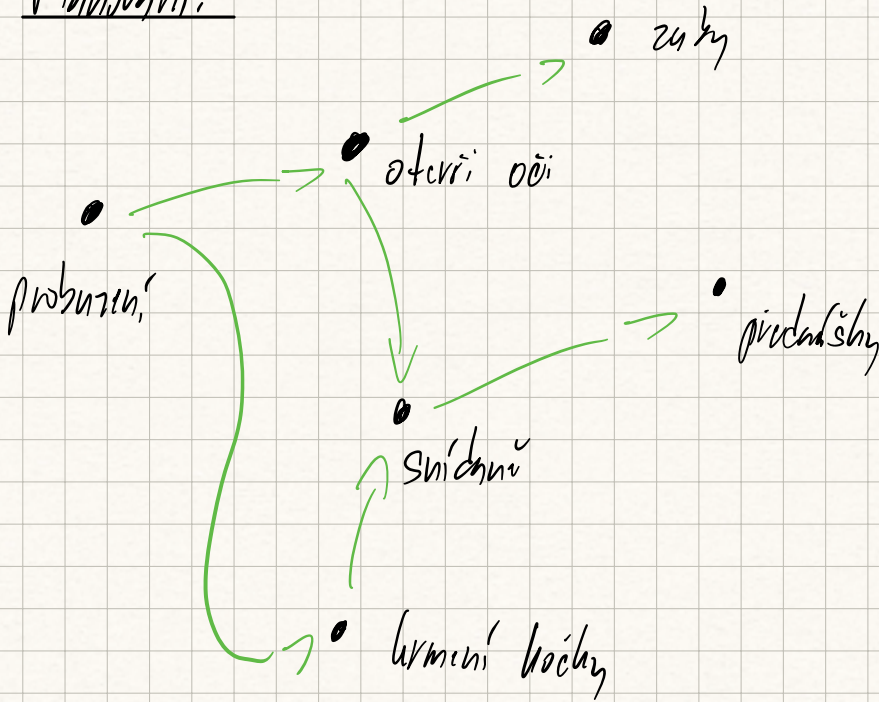
$\rightarrow$ počet cest kude
součet všech předchozích cest $p_1 - p_3 \dots$

$\# \text{cest do } v_j = \sum_{p: p \text{ je E}} c(p) \rightarrow$ to jde dělat postupně zleva lineárně.

u jednoho vrcholu: $\Theta(\deg(v))$

celkem tedy $\Theta(m+n)$, včetně topo. uspoř.

Plánování:



Nesmí tam být smyčky.

Silná souvislost:

(Silná: $\bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet$)

$$\begin{aligned} \text{Rekurze na } V: \quad u \rightsquigarrow v &= \exists \text{ sled z } u \text{ do } v \\ \text{dosáh.} \\ \Leftrightarrow \quad u \rightsquigarrow v &= u \rightsquigarrow v \ \& \ v \rightsquigarrow u \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ je ekvivalence

$\hookrightarrow$ má třídy: komponenty silné souvislosti.

Graf je silně souvislý $\Leftrightarrow \# \text{komponent silné souvislosti} = 1$

Graf komponent $C(G)$: (Kondensace [Kondratiev])

vrcholy: komponenty grafu G

hrany: $(C_i, C_j) : \exists x \in C_i, \exists y \in C_j : \exists xy \in E(G)$

$\hookrightarrow$ když vede hrana mezi komponentami

Graf komponent je DAG:

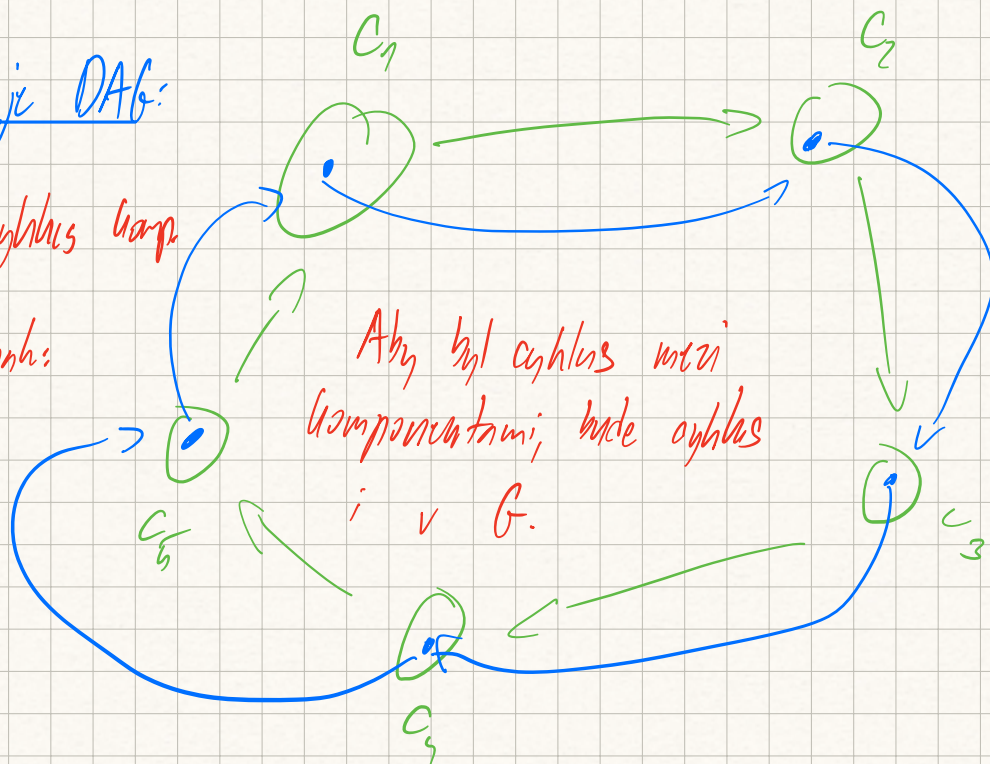
Nikdy existoval cyklus komp.

$C_1 - C_k, C_1$, pak:

$\exists u_1 - u_n$
 $v_1 - v_n$:

$\forall i \ u_i, v_i \in C_i$

$u_i, v_{i+1} \in E$



Aby byl cyklus mezi
komponentami, bude cyklus
 $i \ v \ G$.

Nyní v_1 (cesta v C_1) $u_1 v_2$ (cesta v C_2) $u_2 v_3 \dots$
 $\dots v_n$ (cesta v C_n) $u_n v_1$

je cyklus v $G \Rightarrow$ spor s rízení $C_1 - C_n$

QED