Metoda rozděl a panuj!

— např.: rekurzivní MergeSort

Násobení (obrovských) čísel:

- školní algoritmus $\Theta(n^2)$
- lepší algoritmus:

X | A | B | $X = A \cdot 10^{n/2} + B$

Y | C | D | $Y = C \cdot 10^{n/2} + D$

$$X \cdot Y = AC \cdot 10^{n} + (AD + BC) \cdot 10^{n/2} + BD$$

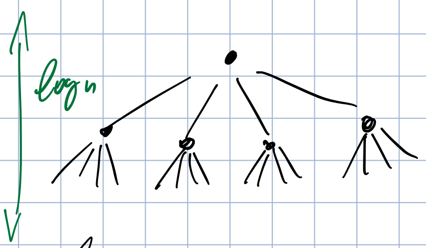
↳ 4 součiny $n/2$ cif. čísel

$$T(n) = 4 \cdot T(n/2) + n$$

$\vdots$

$$T(1) = 1$$

Strom rekurze:



# pp	velikost pp
1	n
4	$n/2$
4^2	$n/4$
⋮	⋮
4^i	$n/2^i$

$$\# \text{ listů: } 4^{\log_2 n} = (2^2)^{\log n} = n^2 \ \boxed{↯}$$

Trik

AC

BC

$$(A+B)\cdot(C+D) = AC + AD + BC + BD$$

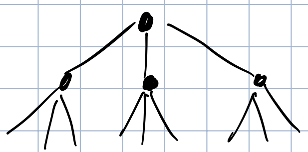
$$-AC - BD = AD + BC$$

Stačí 3 násobení čísel!

$$T(n) = 3T(n/2) + n$$

$$T(1) = 1$$

Lepší strom rekurze



	# pp	velikost pp	čas pp	čas hladiny
	1	n	n	$1 \cdot n$
	3	$n/2$	$n/2$	$3 \cdot \frac{n}{2}$
	3^2	$n/4$	$n/4$	$3^2 \cdot \frac{n}{4}$
	⋮	⋮	⋮	⋮
	3^i	$n/2^i$	$n/2^i$	$3^i \cdot n/2^i$
$\log_2$	$3^{\log_2 n}$	1		

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_2 n} 3^i \cdot \frac{n}{2^i} = n \cdot \sum_{i=0}^{\log_2 n} \underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)}_{q = \frac{3}{2}}^{i} =$$

asymptoticky

$$= \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1} = \Theta(q^k) = \Theta\left(\left(\tfrac{3}{2}\right)^{\log_2 n}\right)$$

Geometrická řada:

$$S = q^0 + q^1 + \dots + q^k$$

$$q \cdot S = q^1 + q^2 + \dots + q^{k+1}$$

$$qS - S = q^{k+1} - 1$$

$$S \cdot (q-1)$$

$$S = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}$$

$$= \Theta\left(n \cdot \frac{3^{\log_2 n}}{n}\right) =$$

$$= \Theta\left(3^{\log_2 n}\right) =$$

$$= \Theta\left(n^{\log_2 3}\right) =$$

$$= \Theta\left(n^{1,5}\right)$$

Implementace:

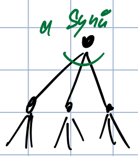
- pro dost malý vstup přepneme na BruteForce alg.

Master Theorem:

$T(n) = a\cdot T(n/b) + \Theta(n^c)$, $T(1) = 1$ $\qquad a \ge 1,\ b > 1,\ c \ge 0$

a – # podp. $\qquad b$ – faktor zmenšení $\qquad \Theta(n^c)$ – lokální práce

Nechť $a = b^k$



na i-té hladině: a^i podproblémů velikosti $\frac{n}{b^i}$ } hloubka $= \log_b n$

čas na podproblém $\left(\frac{n}{b^i}\right)^c$ → čas na hladinu: $a^i\cdot\left(\frac{n}{b^i}\right)^c$

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_b n} a^i\cdot\left(\frac{n}{b^i}\right)^c = n^c\cdot\sum_{i=0}^{\log_b n}\left(\frac{a}{b^c}\right)^i$$

$\left(\frac{a}{b^c}\right)^i = 1 \Rightarrow T(n) = n^c\cdot(\log_b n+1)\cdot 1 = \Theta(n^c\cdot\log n)$

$\left(\frac{a}{b^c}\right)^i < 1 \Rightarrow T(n) = \Theta(n^c)$

– dominantní práce v kořenu

$$\sum_{i=0}^{\log_b n} q^i \le \sum_{i\ge 0} q^i = \frac{1}{1-q} = \Theta(1)$$

$\left(\frac{a}{b^c}\right)^i > 1 \Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

– dominantní práce ve spod

$$\sum_{i=0}^{\log_b n} q^i = \frac{q^{\log_b n+1}-1}{q-1} = \Theta(q^{\log_b n}) =$$

$$= \left(\frac{a}{b^c}\right)^{\log_b n} = \frac{a^{\log_b n}}{b^{c\cdot\log_b n}} = \frac{n^{\log_b a}}{n^c} = n^{\log_b a}$$

$$\left(b^{\log_b n}\right)^c = n^c$$

$$b^{\log_b a\cdot\log_b n} = \left(b^{\log_b n}\right)^{\log_b a} = n^{\log_b a}$$

K důkazu zbývá, kdy n není mocnina b...

Asymptoticky se neliší

$n^+ :=$ nejbližší vyšší mocnina b k n.

$n^- :=$ nejbližší nižší mocnina b k n.

$n^- \le n \le n^+ \qquad n^- \sim n^+$

$\left(\frac{n}{b}\right)^- \le \left\lceil\frac{n}{b}\right\rceil \le \left(\frac{n}{b}\right)^+$

$T(n^-) \le T(n) \le T(n^+)$ $\qquad \boxed{X}$

Strassenův alg. pro rychlé násobení matic:

Buno: $n = 2^k$, na $\mathbb{R}^{n\times n}$

$$\underbrace{\begin{array}{c|cc} & n/2 & n/2 \\ \hline n/2 & A & B \\ n/2 & C & D \end{array}}_{X} \cdot \underbrace{\begin{array}{|cc|} P & Q \\ R & S \end{array}}_{Y} = \underbrace{\begin{array}{|cc|} I & J \\ K & L \end{array}}_{Z}$$

$I = AP + BR$, podobně u ostatních

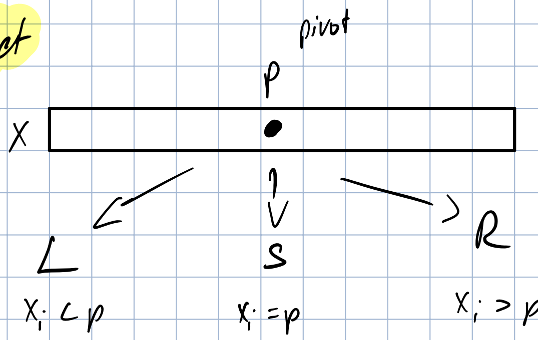
Strassenův trik: 7 násobení stačí $\qquad n^{2,807}$

$$T(n) = 8T(n/2) + \Theta(n^2) \Rightarrow 7T(n/2) + \Theta(n^2) \Rightarrow \Theta(n^{\log_2 7})$$

Selekce – hledání k-tého nejmenšího prvku z $x_1 \dots x_n$ (nesetříděného).

(Využívá se pro hledání mediánu)

QuickSelect



Setřídění: $\boxed{L \mid S \mid R}$

Pokud $k \leq |L|$:

k-tý nejmenší $\in L$

Pokud $|L| < k \leq |L| + |S|$

Pak je to pivot

jinak

$(k - |L| - |S|)$-tý nejmenší $\in P$

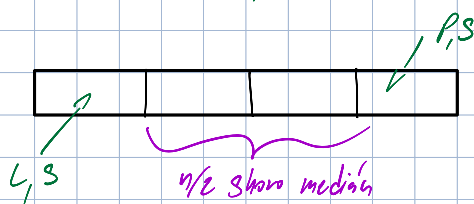
1) Nejlepší případ –> pivot je medián

$|L|, |P| \leq n/2 \quad \Rightarrow T(n) = T(n/2) + \Theta(n) \Rightarrow \Theta(n)$

2) Nejhorší případ –> pivot je minimum

$|L| = 0,\ |S| = 1,\ |P| = -1 \quad \Rightarrow T(n) = n + (n-1) + (n-2) + \dots 1 \Rightarrow \Theta(n^2)$

3)



$|L|, |P| \leq \frac{3}{4} n \quad \Rightarrow T(n) = T\left(\frac{3}{4} n\right) + \Theta(n) =$

$= n + \left(\frac{3}{4}\right) n + \left(\frac{3}{4}\right)^2 n + \dots = \Theta(n)$

Jak ale dostat skoro medián? Randomizované hledání.

1) Vyberu p náhodně.
2) Spočítám $x_i < p$, $x_i > p$
3) Pokud p není skoro medián, restart

$\mathbb{E}[\text{čas. složitost}] = \Theta(n)$

- stačí $\mathbb{E}[\#\text{pokusů}] = \Theta(1)$

$\mathbb{E}[\#\text{pokusů}] \leq 2$

$P[\text{pokus uspěje}] \geq \frac{1}{2}$

$\Downarrow$

Lemma o džbánu:

Lemma o džbánu:

Pokud $P[\text{uspěje}] = p$,

pak $\mathbb{E}[\#\text{pokusů do úspěchu}] = \frac{1}{p}$

Dk: $\mathbb{E} = \sum_n n \cdot \underbrace{P[\#\text{pokusů} = n]}_{(1-p)^{n-1} \cdot p}$

nebo: $\mathbb{E} = 1 + (1-p)\mathbb{E}$

$p \cdot \mathbb{E} = 1$

$\Rightarrow \mathbb{E} = 1/p$

Volím pivota náhodně:

Volím do té doby, než najdu skoro medián

$P[\text{fáze hledání skončí}] \geq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \mathbb{E}[\text{pokusů na fázi}] \leq 2$

Fáze zmenší n alespoň $\frac{3}{4}$-krát

$\mathbb{E}[\text{čas na fázi}] = \Theta(n)$

$\sum$ přes fáze $=$

$\Rightarrow \Theta\left(n + \frac{3}{4} n + \left(\frac{3}{4}\right)^2 n + \dots + \right) = \Theta(n)$