

Rocheďte, zdali je následující matice pozitivně definitní pomocí Gausovy a determinantu.
Pokud ano, udělte Choleského rozklad.

1/a) Gaus: $\rightarrow$ pouze skona dolci, nesoumím prolamovat

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Všechno na diagonale je kladné} \Rightarrow \text{Je pozitivně definitní}$$

Det:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 12 \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \quad |2| = 2 \Rightarrow \text{Všechny jsou kladné, tedy je pozitivně definitní}$$

Choleského rozklad:

$$U^H \quad \begin{array}{c|ccc} U & \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ & 0 & 0 & 2 \end{array} \quad A = U^H U$$

$\rightarrow$ Matice U vyplývá po řádkách

$$1b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 11 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 10 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Je pozitivně definitní}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 11 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & 11 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 1 = 36 + 44 + 2 + 1 = 83$$

$$18 + 8 + 8 - 8 - 8 - 44 = 44$$

$$U^H \quad \begin{array}{c|cccc} U & 1 & 2 & 1 & 0 \\ & 0 & 2 & 1 & 1 \\ & 0 & 0 & 3 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad A = U^H U$$

$$1/c) \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 10 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

				2	1	1	0
				0	1	3	1
				0	0	0	0
				0	0	0	15
2	0	0	0	4	2	2	0
1	1	0	0	2	2	4	1
1	3	0	0	2	4	10	3
0	1	0	15	0	1	3	6

2) Ukážete, že pro pozitivně definitní matici A, B platí: $A+B$ i A^{-1} jsou pozitivně definitní.

- A, B jsou hermitovské: $A = A^H, B = B^H$

→ Součet je opět hermitovský

$$x^H A x > 0$$

$$x^H B x > 0$$

$$(A+B)^H = A^H + B^H = A+B$$

chceme $x^H (A+B) x > 0$

$$x^H A x + x^H B x > 0$$

→ Obě složky jsou kladné,
pak i celkový součet je kladný.

$$A^{-1}$$

$$x^H A x > 0$$

Je A reg.? $\rightarrow \text{ANO!} \Leftrightarrow |A| > 0$

Jelikož $|A| > 0$, pak $|A \cdot A^{-1}| > 0$, tedy: $|A^{-1}| > 0$

$$x^H A^{-1} x = \underbrace{x^H A^{-1H}}_{y^H} \underbrace{A^{-1}}_y x = \underline{y^H A y > 0}$$

Útíz 2 přednášky:

$$(BAB^H)^H = B^H A^H B = BAB^H$$

1) Jeli A hermitovská, pak BAB^H je hermitovská

a) vždy b) pro $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ c) pro B hermitovské

2) Kolik má pozitivně definitní matice řádu n vzhledem k matri $U^H U$ s horní trojúhelníkovou maticí U ?

a) 1 b) 2 c) n d) 16 e) nekonečně mnoho

Na diagonále odmociny kladná čísla, tedy se můžeme vybrat zmněná $\Rightarrow 2^n$

3) Je-li $u \in \mathbb{C}^n$, jaký je rozdíl mezi $u^H u$ a uu^H ?

a) žádný b) první je komplexní číslo, druhé je Hermitovská matice

c) první je Hermitovské, druhé je komplexní číslo

4) A_n je negativně definitní matice, právě když:

a) $\det(A_i) < 0$ pro $\forall i: 1 \leq n$

b) $\det(A_1) < 0$ a $\det(A_i) > 0$ pro $\forall i: 2 \leq n$

c) $\det(A_i) \begin{cases} < 0 & i=1 \pmod{2}, i \in \{1, \dots, n\} \\ > 0 & i=0 \pmod{2}, i \in \{1, \dots, n\} \end{cases}$