

Úlohy ke cvičení

→ Stačí ověřit násobnost / eigenpařty

1. Nalezněte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matic nad tělesem $\mathbb{C}$.

Rozhodněte, zdali jsou tyto matice diagonalizovatelné.

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

? - najít počet vlastních čísel

? - najít počet vlastních vekt.

Musí být n...

2. U matice

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & -7 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 16 & 4 & 15 & -8 \\ 30 & 4 & 26 & -19 \end{pmatrix}$$

známe tři vlastní čísla a to 3, -4 a 5. Dopačítejte zbylé vlastní číslo.

3. Určete vlastní čísla matice

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

4. Rozložte následující matici na součin $\mathbf{RJR}^{-1}$, kde matice $\mathbf{R}$ je regulární a matice $\mathbf{J}$ je v Jordanově normálním tvaru.

a) $\begin{pmatrix} -11 & 30 \\ -10 & 24 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

5. S využitím Jordanova normálního tvaru spočítejte třetí mocninu a druhou odmocninu následující matice (Odmocninou rozumějte takovou matici, jejíž druhá mocnina je daná matice.)

a) $\begin{pmatrix} -11 & 30 \\ -10 & 24 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

6. Následující matici převedte do Jordanova normálního tvaru a určete vlastní, popř. zobecněné vlastní vektory.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ (tato není diagonalizovatelná)}$$

A je diagonalizovatelná $\Leftrightarrow A$ je podobná diagonální 0, t.j. $R^{-1}AR = D$

$\Leftrightarrow \exists n$ vlastních vektorů LN2

$$(AR = R0)$$

$$1) A \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} : p_A(t) = \begin{pmatrix} 2-t & -1 & 2 \\ 5 & -3-t & 3 \\ -1 & 0 & -2-t \end{pmatrix} = (2-t)(-3-t)(-2-t) +$$

$$3 - 6 - 2t - 10 - 5t = (t^2 - 4)(t + 3) - 13 - 7t = -t^3 + 4t^2 - 3t^2 + 12 - 13 - 7t = -t^3 - 3t^2 - 3t - 1 =$$

$$\lambda = -1 \text{ (je alg. trojnásobné, takže stačí)} \quad \underline{\underline{-(t+1)^3}}$$

Nyní vektory:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} x_3 = t \\ x_2 = -t \\ x_1 = -t \end{array}$$

volných proměnných = 1 $\Rightarrow \dim(\ker) = 1 < 3$

Nemá tři vektory, není diagonalizovatelná

$$B \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} : p_B(t) = \begin{pmatrix} 2-t & -1 & -1 \\ 0 & -1-t & 0 \\ 0 & 2 & 1-t \end{pmatrix} = (2-t)(-t-1)(-t+1) =$$

Mám tři eigenvalues, takže musí existovat

i tři vektory, protože každé vlastní číslo má svůj vektor

$$B_{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} x_3 = t \\ x_2 = -t \\ x_1 = 0 \end{array}$$

$$\underline{\underline{R^{-1}AR = D}}$$

$$2: c \cdot (1, 0, 0)^T$$

$$-1: c \cdot (0, -1, 1)^T$$

$$1: c \cdot (1, 0, 1)^T$$

je podobná diag. matici,
je diagonalizovatelná

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$A \cdot R = R \cdot D$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} : C_p(t) = \begin{vmatrix} 1-t & -1 & 0 \\ 0 & 1-t & -4 \\ -1 & 0 & 4-t \end{vmatrix} = (1-t) \cdot (1-t) \cdot (4-t) - 4$$

$$(1-t-t+t^2) \cdot (4-t) - 4$$

$$C_2: \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \} (1, 1, 1)^T$$

Alg. m.s. = 2
Geo. m.s. = 1

tedy není diagonalizovatelná

$$4 - 4t - 4t + 4t^2 - t + t^2 + t^2 - t^3 - 4$$

$$-t^3 + 6t^2 - 9t = 0$$

$$-t^3 + 3t^2 + 3t^2 - 9t = 0$$

$$-t^2 \cdot (t-3) + 3t \cdot (t-3) = 0$$

$$(3t - t^2) \cdot (t-3) = 0$$

$$t \cdot (3-t) \cdot (t-3) = 0$$

$$\begin{matrix} | & | \\ \textcircled{0} & \textcircled{3} \end{matrix} \leftarrow 3$$

2. U matice

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 7 & -7 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \\ 16 & 4 & 15 & -8 \\ 30 & 4 & 26 & -19 \end{pmatrix}$$

Známe tři eigenvalues:

$$3, -4, 5$$

Jak na to?

- konst. člen. $P_A(t)$ je $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 = |A|$

$$\lambda_4 = \frac{|A|}{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3}$$

- 2. nejvyšší: $P_A(t)$ je $(-1)^{n-1} \sum_{i=1}^n a_{ii} = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^n \lambda_i$

$$10 + 5 + 15 - 14 = 3 - 4 + 5 + \underline{x}$$

$$\underline{\underline{11}}$$

3. Určete vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} 3-t & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2-t & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1-t & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1-t & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 7 & -3-t \end{vmatrix} = (1-t) \cdot \begin{vmatrix} 3-t & 2 & 1-t \\ 0 & 2-t & 0 \\ 0 & 5 & 1-t \\ 4 & 8 & 7-t \end{vmatrix}$$

④ a) $\begin{pmatrix} -11 & 30 \\ -10 & 24 \end{pmatrix} : P_A(t) = \begin{vmatrix} -11-t & 30 \\ -10 & 24-t \end{vmatrix} = (-11-t) \cdot (24-t) + 300 =$

$$t^2 - 13t + 36 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 4 \cdot 36}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} = \begin{cases} 9 \\ 4 \end{cases}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} -20 & 30 \\ -10 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = t$$

$$-2x_1 + 3t = 0$$

$$x_1 = \frac{3}{2}t$$

$$v_1 = c \cdot (3, 2)^T \rightarrow \text{candidate for diagonal matrix}$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} -15 & 30 \\ -10 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = c \cdot (2, 1)^T$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array} \right)$$

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, R^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A = R J R^{-1}$$

$$A^3 = R J R^{-1} R J R^{-1} R J R^{-1}$$

$$= R J^3 R^{-1}$$

h/s

B

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$P_B(t) = \begin{vmatrix} -t & 2 & -2 \\ 1 & -1-t & 5 \\ 2 & -4 & 8-t \end{vmatrix} = -t \cdot (-1-t) \cdot (8-t) + 20 + 8 - 20t - 16 + 2t$$