A je diag. $\iff A = R \cdot J \cdot R^{-1}$ $R \ldots$ je reg

$J \ldots$ diagonální

C-H věta: „$P_A(t) = 0$" $0 \in K^{n \times n}$

$\hookrightarrow P_A(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i A^i = 0$

1) Ukažte, že CH platí pro diagonalizovatelné matice:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i A^i = \sum_{i=0}^{n} a_i (RJR^{-1})^i = \sum_{i=0}^{n} a_i R J^i R^{-1} = R \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} a_i J^i\right) R^{-1}$$

$$\hookrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i J^i = \begin{pmatrix} \sum a_i \lambda_1^i & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \sum a_i \lambda_2^i & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \sum a_i \lambda_n^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P(\lambda_n) \end{pmatrix} = 0$$

tohle musí být pro všechny vlastní čísla ale rovno 0.

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $P_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 1 & 1 \\ 0 & 1-t & 0 \\ -1 & 0 & 3-t \end{vmatrix} = (1-t) \cdot ((1-t) \cdot (3-t) + 1)$

$4 - 4t + t^2$

$\lambda_1 = 1$ – alg. násobnost 1

$\lambda_2 = 2$ – alg. násobnost 2

$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$v_1 = c \cdot (2, -1, 1)^T$

$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$v_2 = c \cdot (1, 0, 1)^T$ – geo. násobnost 1

$AR = RJ, \quad A = R \cdot J \cdot R^{-1}$

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & u_1 & u_2 & u_3 \\
R & 2 & 1 & \vdots \\
 & -1 & 0 & \vdots \\
 & 1 & 1 & \vdots \\
\hline
A & & & \\
1\;1\;1 & | & | & | \\
0\;1\;0 & Au_1 & Au_2 & Au_3 \\
-1\;0\;3 & | & | & |
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccc}
J & 1 & 0 & 0 \\
 & 0 & 2 & 1 \\
 & 0 & 0 & 2 \\
\hline
R \quad u_1\; u_2\; u_3 & & & \\
2\;\;1\;\;-1 & | & | & | \\
-1\;\;0\;\;0 & 1u_1 & 2u_2 & u_2+2u_3 \\
1\;\;1\;\;0 & | & | & |
\end{array}
$$

vlastní čísla

tohle je blok vlastního čísla 2.

$$Au_1 = 1u_1$$
$$Au_2 = 2u_2$$
$$Au_3 = u_2 + 2u_3$$

tohle je neznámá

$$Au_3 - 2u_3 = u_2$$
$$(A - 2I)u_3 = u_2$$

pro $t=0$, např.

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

$x_2 = t$

$x_2 = 0 \qquad (t, 0, t)^T \qquad u_3 = (t-1, 0, t)^T$

$x_1 = t$

množina řešení dané soustavy

vektor odpovídající množině všech řešení

Odvoďte vztah mezi $\det(A^H)$ a $\det(A)$

- $\det(A) = \det(A^T)$ → stejný tak pro součet
- součin komplexně sdružených čísel je komplexní číslo součinu

$\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$

$$\det(A^H) = \overline{\det(A)}$$

$$\sum_{p \in S_n} (-1)^{sgn(p)} \prod_{i=1}^{n} (A^H)_{i,p(i)} = \sum_{p \in S_n} (-1)^{sgn(p)} \prod_{i=1}^{n} \overline{a_{p(i),i}} = \sum_{\substack{q \in S_n \\ q = p^{-1}}} (-1)^{sgn(q)} \prod_{j=1}^{n} \overline{a_{j,q(j)}} = \sum_{q} (-1) \left(\prod_{j} a_{j,q(j)} \right) =$$

$$= \overline{\left(\sum (-1)^{sgn(p)} \prod_j a_{j,q(j)}\right)} = \overline{\det(A)}$$

$A^H = A^{-1}$

$A^H A = A^{-1} A = I_n$

b) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3i \\ 3 & 4i \end{pmatrix}$

$A^H = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3i & -4i \end{pmatrix}$

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3i & -4i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 3i \\ 3 & 4i \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

→ tzn. že je unitární