

1. Pro standardní skalární součin $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$ nad $\mathbb{C}^n$, resp $\mathbb{R}^n$ určete u následujících vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$:

- skalární součin vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$
- euklidovské normy vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$
- vzdálenost vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$
- zdali jsou vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ navzájem kolmé.

a) $\mathbf{x}^T = (4, 2, 3)$, $\mathbf{y}^T = (1, 5, -2)$.

b) $\mathbf{x}^T = (3, 1, -2)$, $\mathbf{y}^T = (1, -3, 2)$.

c) $\mathbf{x}^T = (2, -1, 4)$, $\mathbf{y}^T = (5, 2, -2)$.

d) $\mathbf{x}^T = (2, 1, 4, -1)$, $\mathbf{y}^T = (4, -1, 0, 2)$.

e) $\mathbf{x}^T = (2 + i, 0, 4 - 5i)$, $\mathbf{y}^T = (1 + i, 2 + i, -1)$.

f) $\mathbf{x}^T = (1, 2, 1, -2i)$, $\mathbf{y}^T = (i, 2i, i - 1, 2)$.

g) $\mathbf{x}^T = (1, 1 + i)$, $\mathbf{y}^T = (2i, a + bi)$ (s reálnými parametry a, b)

a)

$$= 4 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-2) = 8 \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} 4 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-2) = 8 \end{matrix}} \right\} \text{sh. součin}$$

$$= \|\mathbf{x}\| = \sqrt{4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3} = \sqrt{29} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} \sqrt{4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3} = \sqrt{29} \end{matrix}} \right\} \text{eukl. normy}$$

$$= \|\mathbf{y}\| = \sqrt{1 \cdot 1 + 5 \cdot 5 + (-2) \cdot (-2)} = \sqrt{30}$$

$$= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|(3, -3, 5)^T\| = \sqrt{9 + 9 + 25} = \sqrt{43} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} \sqrt{9 + 9 + 25} = \sqrt{43} \end{matrix}} \right\} \text{vzdálenost}$$

$$? \mathbf{x} \perp \mathbf{y} \quad \text{Ne, protože } \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle \neq 0 \quad \left. \vphantom{\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle \neq 0} \right\} \text{úhel}$$

b)

$$= 3 + (-3) - 4 = -4$$

$$= \|\mathbf{x}\| = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9}$$

$$= \|\mathbf{y}\| = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9}$$

$$= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|(2, 4, -4)\| = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6$$

$$f) \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i = -i - 4i - i - 1 - 4i = -10i - 1$$

$$= \|\mathbf{x}\| = \sqrt{1 + 4 + 1 + 4} = \sqrt{10}$$

$$= \|\mathbf{y}\| = \sqrt{1 + 4 + 2 + 1} = \sqrt{8}$$

$$= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|(1 - i, 2 - 2i, -i, -2i)\| = \sqrt{2 + 8 + 5 + 8} = \sqrt{23}$$

$\mathbf{x} \not\perp \mathbf{y}$ nejsou kolmé!

2. Určete u následujících vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$:

- skalární součin vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$
- normy vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$
- zdali jsou vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ navzájem kolmé.

vzhledem ke skalárnímu součinu na $\mathbb{C}^3$ dánému předpisem:

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + 2x_3 \bar{y}_3 + x_3 \bar{y}_2 + x_2 \bar{y}_3$$

a) $\mathbf{x}^T = (4, 2, 3)$, $\mathbf{y}^T = (1, 5, -2)$.

b) $\mathbf{x}^T = (3, 1, -2)$, $\mathbf{y}^T = (1, -3, 2)$.

c) $\mathbf{x}^T = (2, -1, 4)$, $\mathbf{y}^T = (5, 2, -2)$.

d) $\mathbf{x}^T = (2 + i, 0, 4 - 5i)$, $\mathbf{y}^T = (1 + i, 2 + i, -1)$.

$$a) \langle x | y \rangle = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot (-2) + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 5 = 13$$

$$\|x\| = \sqrt{4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3} = \sqrt{50}$$

$$\|y\| = \sqrt{1 \cdot 1 + (-3) \cdot (-3) + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) + (-3) \cdot 2} = \sqrt{14}$$

$$\|x - y\| = \|(3, 3, 5)^T\| = \sqrt{9 + 9 + 50 - 15 - 15} = \sqrt{38}$$

kolmí nejsou

$$b) \langle x | y \rangle = 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + 2 \cdot (-2) \cdot 2 + (-2) \cdot (-3) + 1 \cdot 6 = 0$$

$$\|x\| = \sqrt{9 + 1 + 8 - 2 - 2} = \sqrt{14}$$

$$\|y\| = \sqrt{1 + 9 + 8 - 6 - 6} = \sqrt{6}$$

$$\|x - y\| = \|(2, 1, -4)^T\| = \sqrt{4 + 16 + 32 - 16 - 16} = \sqrt{20}$$

$$x \perp y \text{ jsou kolmí!} \Leftrightarrow \langle x | y \rangle = 0$$

Tobte bude téma další přednášky na příští týden

3) Najděte $\perp$ dvojice:

$$- (1, 2, 3)$$

$$- (5, 2, -3)$$

$$- (-2, -1, -4)$$

$$1, 2 = \sqrt{5 + 4 - 9} = 0$$

$\perp$

$$1, 3 = \sqrt{2 + 2 - 12} = \sqrt{-16}$$

$\times$

$$2, 3 = \sqrt{-10 - 2 + 16} = 0$$

$\perp$

Uklost:

reflexivita $\times$

symetrie $\checkmark$

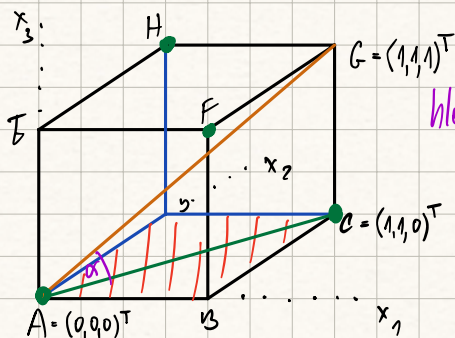
transitivita $\times$

ireflexivita $\times$

4. Určete kosinus úhlu, který svírá hlavní úhlopříčka krychle s podstavou. Podobně spočítejte kosinus úhlu mezi podstavou čtyřstěnu a jednou z hran vedoucích do zbývajících vrcholů. Spočítejte také kosinus úhlu mezi úhlopříčkou osmistěnu a jeho libovolnou stěnou.

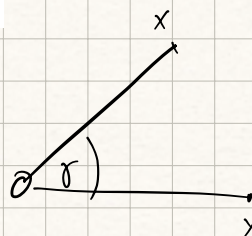
Jak spolu velikosti těchto úhlů souvisejí?

Jaký je objem jednotkového čtyřstěnu a jednotkového osmistěnu?



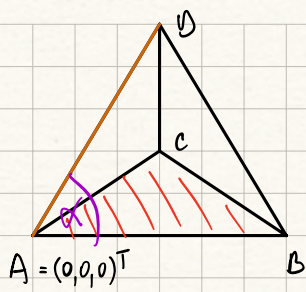
hledám α mezi $|GA|$ a $|AF|$

$$\cos(\alpha) = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{\sqrt{1+1+0} \cdot \sqrt{1+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$



$$\cos(\gamma) \cdot \|x\| \cdot \|y\| = \langle x | y \rangle$$

$$\cos(\gamma) = \frac{\langle x | y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$$



Zajímá mě úhel mezi plošinou a úsečkou $|AD|$