

1) $g(u) = 2x^2 + 2xy - y^2 - 2zt - t^2$, kde $u = (x, y, z, t)^T$. Najděte nulový vektor vyjádření vzhledem k $X = \{ (1, 1, 1, 1)^T, (1, 1, 1, 0)^T, (1, 1, 0, 0)^T, (1, 0, 0, 0)^T \}$

$$B_X = [id]_{X, X}^T B [id]_{X, X}$$

$$[id]_{X, X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$[id]_{X, X}^T \cdot B \cdot [id]_{X, X} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

2) Rozhodněte, zda v $\mathbb{R}^3$ existuje forma g t.č.:

$$g((1, 0, 0)^T) = 1, g((0, 1, 0)^T) = 2, g((0, 0, 1)^T) = 3, g((1, 1, 1)^T) = 4, g((1, 1, 0)^T) = 5, g((0, 1, 1)^T) = 6$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

$$f(v_i, v_j) = \frac{1}{2} (g(v_i + v_j) - g(v_i) - g(v_j))$$

Určete signaturu kv. formy dané maticí

Postup:

1) spočítat vlastní čísla, diagonalizovat, pak přenést na $-1, 0, 1$

2) Bausonova eliminace t.č. zároveň eliminuje řádky i sloupce stejnými úpravami

1)

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad P_A(t) = (10-t)(2-t) - 1$$

$$= t^2 - 12t + 19 \quad t_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{68}}{2} \approx 8, 2, 4$$

2)

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{10}} \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 0 & \frac{19}{10} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & \frac{19}{10} \end{pmatrix}$$

Polární kóde

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 10 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 10 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{19}{10} & -\frac{1}{10} & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 10 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{19}{10} & -\frac{1}{10} & 1 \end{array} \right)$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{sig}(2, 1, 0)$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

$$= \text{sig}(2, 1, 0)$$

Určete signaturu reálné kv. formy:

$$d) q((x_1, x_2, x_3, x_4)^T) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \sim$$

Určete signaturu v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & a-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & a-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$a < 0: \text{sig}(1, 2, 0)$$

$$a = 0: \text{sig}(1, 1, 1)$$

$$a > 0: \text{sig}(2, 1, 0)$$