

Jméno a příjmení: *Mikoláš Fromm, McLoaAus*

Potřebný čas: *30*

1. Určete Choleského rozklad následující reálné matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 6 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 11 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}^H \mathbf{U}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & \mathbf{U} & & & & \\ \mathbf{U}^H & \mathbf{A} & & & & \\ \hline 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 6 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 11 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L > Počítáno podle vzpisového pravidla z předchozího.

2. S využitím rozkladu matice A z první úlohy vyřešte soustavu $Ax = (48, 35, 13, 40, -4)^T$.

$$Ax = U^H Ux = b$$

$$Ax = U^H y = b, \text{ kde } y = Ux$$

$$b = (48, 35, 13, 40, -4)^T$$

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U^H = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Nejprve najdeme řešení y soustavy $U^H y = b$

2) Pomocí toho najdeme řešení $Ux = y$

$$U^H y = b$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 48 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 35 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 13 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow$$

Řešení soustavy $U^H y = b$ je:

$$y = (16, 3, 0, 8, 1)^T$$

$$Ux = y$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow$$

Řešení soustavy $Ux = y$ je:

$$x = (5, 0, -2, 3, 1)^T$$

Řešení soustavy $Ax = (48, 35, 13, 40, -4)^T$ je:

$$x = (5, 0, -2, 3, 1)^T$$