

Jméno a příjmení: Mikuláš Fromm, Melodius

Potřebný čas: 75 min

1. Kvadratická forma nad $\mathbb{Z}_5$ má vůči bázi $X = \{(1, 3, 1)^T, (3, 0, 2)^T, (2, 1, 4)^T\}$ analytické vyjádření $g(\mathbf{u}) = 3u_1^2 + 2u_1u_2 + u_1u_3$. Určete její analytické vyjádření vůči kanonické bázi.

$$A_X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_k = [id]_k^T \cdot A_X \cdot [id]_k$$

$$[u]_X = [id]_Y [u]_Y$$

od báze u do X .

Matrice přechodu:

 $\mathbb{Z}_5$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right)$$

$$[id]_X = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_k = [id]_X^T \cdot A_X \cdot [id]_X =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{matrix}$$

Analytické vyjádření vůči kanonické bázi je tedy:

$$u_1^2 + 3u_2^2 + 3u_1u_2 + 3u_1u_3 + 3u_2u_1 + u_2u_3 + 3u_3u_1 + u_3u_2 =$$

$$= u_1^2 + 3u_2^2 + u_1u_2 + u_1u_3 + 2u_2u_3$$

→ matice bude symetrická

2. Určete matici kvadratické formy g nad $\mathbb{Z}_7^6$ vůči bázi X takové, že pro $i \in \{1, \dots, 6\}$ je $g(x^i) = i$.

Zde x^i značí i -tý vektor báze X .

$$X = \{x^i \mid i \in \{1, \dots, 6\}\}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

báze X :

$$X = \left\{ (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T, (1, 1, 0, 0, 0, 0)^T, (1, 1, 1, 0, 0, 0)^T, \right. \\ \left. (1, 1, 1, 1, 0, 0)^T, (1, 1, 1, 1, 1, 0)^T, (1, 1, 1, 1, 1, 1)^T \right\}$$

$$Z_7: g(x^1) = 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 = 1$$

$$g(x^2) = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 = 2$$

$$g(x^3) = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 = 3$$

;

$$g(x^6) = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 6$$

Z_7

$$0^2 = 0$$

$$1^2 = 1$$

$$2^2 = 4$$

$$3^2 = 2$$

$$4^2 = 2$$

$$5^2 = 4$$

$$6^2 = 1$$

Řešeno metodou „přemýšlím a oře-
nuju, tak přijdu od jednoduššího (I_n).“

Chci jsem symetrickou matici. Zároveň
jsem očekával, že budu pracovat s
1, aby to mohl bezproblémně násobit.

Do I_n jsem jen zkusil doplnit
takovou bázi, pro kterou platí
vstupní předpis.