

Jméno a příjmení: Miloslav Frmm, McCoolAnsPotřebný čas: 60 min1. Pro reálnou matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 4 & 10 \end{pmatrix}$ určete vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu:a) – množinu všech vektorů, které jsou kolmé na všechny řádky matice $\mathbf{A}$,b) – množinu všech vektorů, které jsou kolmé na všechny vektory ze sloupcového prostoru matice $\mathbf{A}$.Kolmost vektorů x, y nastává tehdy, pokud $\langle x, y \rangle = 0$

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 4 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} x_4 = t \\ x_3 = -3t \\ x_2 = s \\ x_1 = -2s + t \end{array}$$

a) zk: $t=s=1$

$$\langle (1, 2, 1, 2), (-1, 1, -3, 1) \rangle = -1 + 2 - 3 + 2 = 0$$

$$s \cdot (-2, 1, 0, 0) + t \cdot (1, 0, -3, 1)$$

$$\langle (-2, -4, -1, -1), (-1, 1, -3, 1) \rangle = 2 - 4 + 3 - 1 = 0$$

$$\langle (2, 4, 4, 10), (-1, 1, -3, 1) \rangle = -2 + 4 - 12 + 10 = 0$$

$$V_a = \{ (-2s + t, s, -3t, t) \mid t, s \in \mathbb{R} \}$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (-6, -2, 1)$$

b) zk: $t=1$

$$\langle (1, -2, 2), (-6, -2, 1) \rangle = -6 + 4 + 2 = 0$$

$$\langle (2, -4, 4), (-6, -2, 1) \rangle = -12 + 8 + 4 = 0$$

$$\langle (1, -1, 4), (-6, -2, 1) \rangle = -6 + 2 + 4 = 0$$

$$\langle (2, -1, 10), (-6, -2, 1) \rangle = -12 + 2 + 10 = 0$$

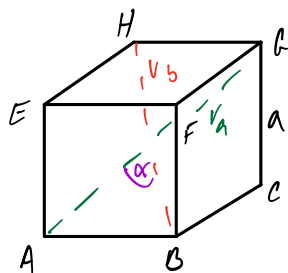
$$V_b = \{ t \cdot (-6, -2, 1) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

$$\cos(\alpha) \cdot \|x\| \cdot \|y\| = \langle x|y \rangle \Leftrightarrow \cos(\alpha) = \frac{\langle x|y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

2. Určete kosinus úhlu, který svírají dvě tělesové úhlopříčky krychle. a)

Určete kosinus úhlu, který svírají dvě sousední stěny osmistěnu. b)

Jak spolu tyto úhly souvisejí a proč? (Zkuste zdůvodnit pomocí geometrie.)

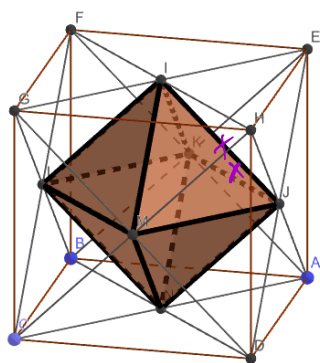


$$v_a = (1, 1, 1)$$

$$v_b = (-1, 1, 1)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{-1+1+1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

b)



$$A = (0, 0, 0) \quad E = (0, 0, 1) \quad K = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

$$B = (1, 0, 0) \quad F = (1, 0, 1) \quad M = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$$

$$C = (1, 1, 0) \quad G = (1, 1, 1) \quad J = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$D = (0, 1, 0) \quad H = (0, 1, 1) \quad I = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

$$\overrightarrow{JI} = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

$$X = J + \frac{1}{2} \overrightarrow{JI} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$$

$$\overrightarrow{XM} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

$$\overrightarrow{XK} = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

$$\|\overrightarrow{XM}\| = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{3}{8}}$$

$$\|\overrightarrow{XK}\| = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{3}{8}}$$

$$\cos(\gamma) = \frac{\langle \overrightarrow{XM}, \overrightarrow{XK} \rangle}{\|\overrightarrow{XM}\| \cdot \|\overrightarrow{XK}\|} = \frac{\frac{1}{16} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16}}{\sqrt{\frac{3}{8}} \cdot \sqrt{\frac{3}{8}}} = \frac{-\frac{2}{16}}{\frac{6}{16}} = -\frac{1}{3}$$

Společně tyto dva úhly doplňují do 180° .