

Jméno a příjmení: Mikoláš Frumm, MeCoolAus

Potřebný čas:

1. V $\mathbb{R}^3$ určete ortogonální doplněk množiny $\{(1, 2, 3)^T, (4, 5, 6)^T, (7, 8, 9)^T\}$ vzhledem ke skalárnímu součinu danému předpisem $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^T \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

Ortogonální doplněk: = množin všech vektorů, které jsou kolmé na prostor

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \dim(M) = 2 \\ \Rightarrow \dim(M^\perp) = 1 \end{array}$$

hledím tedy
jeden vektor,
kteřý je kolmý
na první dva vektory
z množiny (protože na třetí je automaticky kolmý)

kolmost

$$\langle \mathbf{x}_1 | \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{x}_2 | \mathbf{v} \rangle = 0 \Rightarrow \mathbf{v} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{v} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{v} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{v} \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 13 & 8 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} v_3 = t : t \in \mathbb{R} \\ v_2 = \frac{3}{2}t \\ v_1 = -1t \end{array}$$

může být
zvoleno
libovolně.

$$\mathbf{v} = \left(-1, \frac{3}{2}, 1 \right)$$

Doplněk = $\text{span} \left\{ \left(-1, \frac{3}{2}, 1 \right) \right\}$

Zkontroluj:

$$\begin{aligned} \left(-1, \frac{3}{2}, 1 \right) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} &= \left(-1, \frac{3}{2}, 1 \right) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ \left(-1, \frac{3}{2}, 1 \right) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} &= \left(-1, \frac{3}{2}, 1 \right) \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

2. Doplňte hodnoty parametrů a, b a c kde $a, b \geq 0$ tak, aby následující zobrazení f bylo izometrií mezi podprostory dimenze 2 v $\mathbb{R}^3$ vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu na $\mathbb{R}^3$:

$$f((4, 1, 3)^T) = (1, 0, a)^T, f((1, 2, 4)^T) = (3, b, c)^T$$

Isometrie := pohyb $\langle x | y \rangle = \langle f(x) | f(y) \rangle$

$$f \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$$

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\|(4, 1, 3)^T\| = \|(1, 0, a)^T\|$$

$$\|(1, 2, 4)^T\| = \|(3, b, c)^T\|$$

$$\sqrt{16 + 1 + 9} = \sqrt{26} = \sqrt{1 + a^2}$$

$$26 = 1 + a^2$$

$$a = \pm 5$$

$$\downarrow a, b \geq 0$$

$$a = 5$$

$$\sqrt{1 + 4 + 16} = \sqrt{21} = \sqrt{9 + b^2 + c^2}$$

$$b^2 + c^2 = 12$$

Tedy například:

$$b = \sqrt{8}$$

$$c = \sqrt{4}$$