Porovnejte množiny (inkluzí, mohutností):

$$A = \{M \mid M \subseteq \mathbb{N}\} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$$, nespočetná

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{M \mid M \subseteq \{1,2,\dots,n\}\}$$, spočetná = postupně přidáním konečné množiny.

$$C = \bigcup_{k=1}^{\infty} \binom{\mathbb{N}}{k}$$, taky spočetná, protože i B, a skoro se neliší

$$D = \bigcup_{k=1}^{\infty} \binom{\mathbb{R}}{k}$$, tady taky chybí prázdná množina

určitě je nespočetná, protože už jen jednoprvkových množin je tam $|\mathbb{R}|$.

A skoro jako C, jen C nemá $\emptyset$

$C \subsetneq A$

$C \subsetneq D$

$B \subsetneq A$

Žádná nekonečná množina nebude v B, tedy v B chybí $\mathbb{N}$, protože B je generovaná konečnou množinou.

$C \subseteq B$

V C jen chybí prázdná množina.

$|B| = |C|$, jelikož se liší o jeden prvek, což u nekonečných množin nevadí.

Pro následující množiny najděte: Suprema / Infima, Maxima / Minima:

$A = \{\sin(x),\ x \in (0, \pi)\}$

$B = \{a^2 - b^2,\ a, b \in \mathbb{N},\ a > b\}$

$C = \{x \in \mathbb{R},\ x^2 \leq 2\}$

$C' = \{x \in \mathbb{Q},\ x^2 \leq 2\}$

$\inf C' = \inf C$, $\sup C' = \sup C$, $\min C' =$ „není", $\max C' =$ „není"

$\max A = 1 = \sup A$

$\inf A = 0$, $\min A =$ „není"

$\max B =$ „není", $\sup B =$ „není" $(+\infty)$

$\min B = 3$, $\inf B = 3$

$\max C = \sqrt{2}$, $\sup C = \sqrt{2}$

$\min C = -\sqrt{2}$, $\inf C = -\sqrt{2}$

$\to \sqrt{2}$ není součástí $\mathbb{Q}$.

$A, B \subseteq \mathbb{R}$, existují $\sup A, \sup B, \inf A, \inf B$

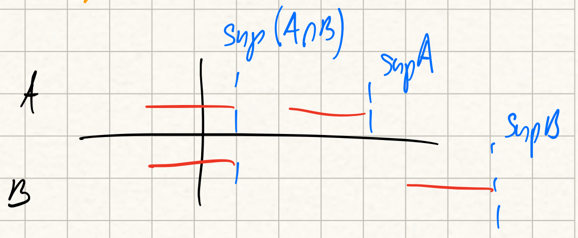
a) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$

$\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$

b) $A \cap B \neq \emptyset$

→ pokud je průnik prázdná množina, pak neexistuje sup/inf

$$\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$$
$$\inf(A \cap B) \geq \max(\inf A, \inf B)$$



$$\Rightarrow \max(\inf A, \inf B) \leq \inf(A \cap B) \leq \sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$$

c) $A \setminus B \neq \emptyset$

$$\inf A \leq \inf(A \setminus B) \leq \sup(A \setminus B) \leq \sup A$$

$$\sup B < \sup A \Rightarrow \sup(A \setminus B) = \sup A$$

? $\sup A = \sup B = \sup(A \setminus B)$

$$\langle 0, 1 \rangle \setminus (0, 1) = \{0, 1\}$$

d) $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B$$
$$\inf(A-B) = \inf A + \inf B$$

$\forall a \in A: a \leq \sup A$

$\forall b \in B: b \leq \sup B$

Dk: $\forall a \in A, \forall b \in B: a + b \leq \sup A + \sup B$

$s' < \sup A + \sup B$

$0 < (\sup A + \sup B) - s' = \varepsilon$

$\exists a' \in A: a' > s_A - \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists b' \in B: b' > s_B - \frac{\varepsilon}{2}$

$a' + b' > s_A + s_B - \varepsilon$

$a' + b' > s'$ $\boxed{\lightning}$

ukážu, že pak existuje prvek, který by měl být nad tou horní závorou, což je spor.

e) $A \cdot B = \{ a \cdot b \mid a \in A, b \in B \}$

→ znaménka to mohou přetáčet, když jedna množina je záporná, nebo i obě...

$$\sup(A \cdot B) = \max(S_A \cdot S_B, I_A \cdot I_B, S_A \cdot I_B, S_B \cdot I_A)$$