

PP

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n)$ neexistuje

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$

zadání
řešení

a) najdu si 2 podposloupnosti, které porovnáme

např. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ rostoucí t.č. $\frac{1}{2} \leq \sin(a_n) \leq 1$

$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ rostoucí t.č. $-1 \leq \sin(b_n) \leq -\frac{1}{2}$

jelikož nemají stejnou limitu vůči, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n)$

neexistuje



b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \stackrel{?}{\Rightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(a_n) = 0$

platí, ale zatím to nemáme doložené

• musíme na to jít jinak: omezíme funkcemi

Věta (s dvěma policajty):

$a_n \leq b_n \leq c_n \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$

$\Downarrow$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$

$$\underline{0 \leftarrow 0 \leq \sin\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0}$$

$\Downarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$



c)

$$\underline{0 \leftarrow -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$$



(PR)

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}-1} \quad (n \geq 2) = 1$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = 0$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = 0$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right) = 1$$

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n} - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

L'Hôpital's Rule

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) - (n-1)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{2}{\infty} = 0$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) - (n+1)}{\left(\frac{1}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}\right)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})^2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{\cancel{1 + \frac{1}{n}} - \cancel{1 + \frac{1}{n}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{n}} = 1$$

$$= \frac{2}{1+1} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{A}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = L \geq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(\sqrt{a_n} \cdot \sqrt{a_n})}_{a_n} = L \cdot L = L^2 = A$$

(PR) důkaz existence limity (přes monotonií a omezenost)

$$c > 0$$

$$a_1 = \sqrt{c}$$

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + c} \quad (n \geq 1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?$$

$$2. \text{ pokud } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \text{ pak } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = A =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n + c} = \sqrt{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) + c} = \sqrt{A + c}$$

$$A = \sqrt{A + c}$$

$$A^2 = A + c$$

$$A^2 - A - c = 0$$

$$\rightarrow A_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{c + \frac{1}{4}} \rightarrow \text{záporný kořen neodpovídá}$$

$$\underline{\underline{A = \frac{1}{2} + \sqrt{c + \frac{1}{4}}}}$$

zodpovídá

a) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ hladná ✓

b) a_n (?) a_{n+1} rastoucí na $(0, A)$ ✓

$$a_n \quad (?) \quad \sqrt{a_n + c}$$

$$a_n^2 \quad (?) \quad a_n + c$$

$$a_n^2 - a_n - c \quad (?) \quad 0$$



1) existence a

c) omezení shora A (indukcí)

$$n=1: a_1 = \sqrt{c} < A = \frac{1}{2} + \sqrt{c + \frac{1}{n}}$$

$$n \rightarrow n+1: a_{n+1} = \sqrt{a_n + c} \leq \sqrt{A + c} = A \quad \checkmark$$

PR hromadné body

$$\omega_n = (-1)^n \quad \text{Hrom.} = \{\pm 1\}$$

$$\omega_1 = 1$$

$$\omega_n = \min \{ d \in \mathbb{N} : d \geq 2 \wedge d \mid n \}$$

$(n \geq 2)$

Hromadné body?

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ω_n	1	<u>2</u>	3	<u>2</u>	5	<u>2</u>	7	<u>2</u>	3	<u>2</u>

Hromadné body = množina všech prvočísel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = ? = 0$$

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2 \cdot \dots \cdot n}{n \cdot \dots \cdot n}$$

≤ 1

2 polnosti

$$0 \leq \dots \leq \frac{1}{n}$$