

$$2 = \sqrt[n]{2^n} \leq \sqrt[n]{n^2 + 2^n} \leq \sqrt[n]{2 \cdot 2^n} = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{2^n} \leq \sqrt[n]{n^2 \cdot 2^n} \quad \left. \vphantom{\sqrt[n]{2 \cdot 2^n}} \right\} \rightarrow \lim 2$$

dolní i horní odhad s
limitou 2, resp. stejnou limitou

Spočítej limitu:

$$d_n = \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} \quad (a, b, c \in \mathbb{R}^+) \text{ Buď } a \geq b \geq c \geq 0$$

Tahle jsou
odhady

$$\sqrt[n]{a^n} \leq \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} \leq \sqrt[n]{3a^n} = \sqrt[n]{3} \cdot \sqrt[n]{a^n}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n} = a$
horní i dolní limita stejná
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} = 1$

$$c_n = \sqrt[n]{n^2 + 2^n} \rightarrow 2$$

$$b_n = \sqrt[n]{2^n + n - 1} \rightarrow 1$$

$$a_n = \sqrt[n]{n + 1} \rightarrow 1$$

$$c \in \mathbb{R}, c > 0$$

$$a_1 = \sqrt{c}$$

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + c}, n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$$

Pokud $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = A$ (jako když se posunul o jeden prvek)

2) Najít limitu

věta o $\lim \sqrt{\quad}$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n + c} = \sqrt{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) + c} = \sqrt{A + c}$$

$$A = \sqrt{A + c} \quad a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{díky formuli chceme jen nezáporné čísla.}$$

$$A^2 = A + c \rightarrow A^2 - A - c = 0 \rightarrow A_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4c}}{2} \rightarrow \frac{1}{2} + \sqrt{c + \frac{1}{4}}$$

1) Dokázat existenci limity

- ukážeme, že je:

a) rostoucí

b) shora omezená

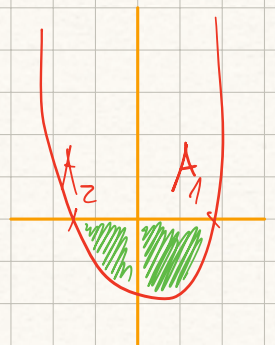
$$\textcircled{a) \quad} a_n < a_{n+1}$$

$$\sqrt{a_n + c} > a_n > 0$$

$$a_n + c > a_n^2$$

$$0 > a_n^2 - a_n - c$$

$$\text{pro } a_n \in (A_2, A_1)$$



$$\textcircled{b) \quad} \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n < A_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{c + \frac{1}{4}}$$

$$n=1 \quad a_1 = \sqrt{c} < \sqrt{c + \frac{1}{4}} < \frac{1}{2} + \sqrt{c + \frac{1}{4}} \quad \checkmark$$

$$n \rightarrow n+1$$

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + c} < \sqrt{A_1 + c} = \sqrt{A_1^2} = A_1$$

Takže byl důkaz přesně popsán

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad \sqrt[n]{n} > 1$$

budou dokazovat, že to a_n jde k nule, aby platilo $\lim \sqrt[n]{n} = 1$

$$\sqrt[n]{n} = 1 + a_n : \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n > 0$$

$$n = (1 + a_n)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_n^i \geq \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot a_n^2$$

binom.

sočet bude určitě větší než každý jednotlivý člen

$$1 \geq \frac{(n-1)}{2} \cdot a_n^2$$

$$\frac{2}{n-1} \geq a_n^2 \quad \sqrt{\frac{2}{n-1}} \geq a_n \geq 0$$

Věta o dvou políchtech.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n-1} = 0$$

tudíž i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 + 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

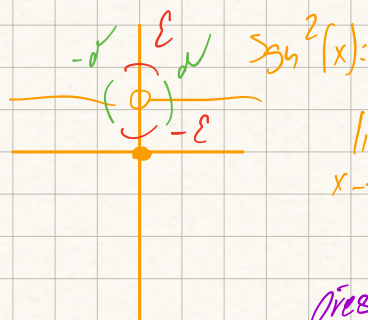
Pro každou bodě $a \in \mathbb{R}^+$ limitu $A \in \mathbb{R}^+$, pokud:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in P(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(A, \varepsilon)$ tedy x v okolí bodu a funkční hodnoty v okolí A .

Okolí nekonečna:

$$U(\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty)$$

$$U(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon)$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin^2(x) = 1$$

pretože v bodě 0 je $\sin = 0$, tak limita je 1, protože v tom nejblížešm okolí $x=0$ je $f(x)=1$.

Proč neexistuje $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$?

Chceme: $\varepsilon = \frac{1}{2}$

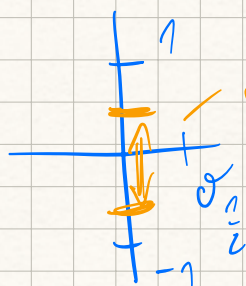
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (-\delta, \delta) : \sin \frac{1}{x} \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$$

Ukážeme:

$$\forall \delta > 0 \exists x_1, x_2 \in (0, \delta) : \sin \frac{1}{x_1} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} < \delta$$

$$\sin \frac{1}{x_2} = -1$$

stačí zvolit dostatečně velké "k".



tady je ale pouze 1, takže pro δ blíže 1 a -1, což je 1/2.