

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Spocítejte limitu:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

$$\frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \dots) - 1}{x} = \frac{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \dots$$

ted' už můžeme dosadit
za x nulu a bude
to definováno!

$$\rightarrow 1 + \frac{0}{2} + \frac{0}{6} + \dots + 0 + \dots = 1$$

$$\frac{e^0 - 1}{0} = \frac{0}{0} \text{ není definováno!}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

$$\xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \dots$$

ted' už dosadíme nulu a
bude to definováno, případně
 x^2 můžeme zrušit.

$\rightarrow$ opět $\frac{\sin 0}{0}$ není definováno

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Aritmetický limit

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \left(\frac{x}{6} + \frac{x^2}{120} - \dots \right) \right)$

pravostranní $= +\infty - 0$

$x \rightarrow 0^-$ $\text{levostranní} = -\infty - 0$

2 toho myslíme, že to nemá celkový limit, jelikož jednotlivé
strany nemají stejnou limitu.

Pozorování :

$\sin x \in (-1, 1)$

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$$

$$\sin \frac{1}{x}$$

neexistuje

$$x_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$

$$\sin x_k = 1$$

$$y_k = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}$$

$$\sin y_k = -1$$

} dvě různé
limity těchto
argumentů

můžeme počítat aritmeticky,
ale musíme psát
většinu v složené funkci

$$\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = L$$

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = d$$

$$\lim_{x \rightarrow d} f(x) = L$$

musí být spojitá

Spočítejte limitu:

→ jelikož jsme už vše spočítali dříve obecnou hodnotu. Obecná hodnota ale musí mít stejnou limitu.

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1} = 1$$

$$f(g) = f(g(x)) = \frac{\ln(x+1)}{e^{\ln(x+1)} - 1} = \frac{\ln(x+1)}{x}$$

→ Totu však nemí v 0 definováno, tedy to není ani spojitě.

Spočítejte limitu:

→ Pokud máme po dosazení prvky nenulové, můžeme použít aritmetickou limitu.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5 + 4x^3 + 1}{3x^5 - 7x^2 - 2}$

a) $\frac{\frac{1}{x^5} \cdot (2 + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^5})}{\frac{1}{x^5} \cdot (3 - \frac{7}{x^3} - \frac{2}{x^5})} = \frac{(2 + 0 + 0)}{(3 - 0 - 0)} = \frac{2}{3}$ *aritmetická limita*

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^2}{x^3 - 12x + 16} = \frac{(x-2) \cdot (x+4)}{(x-2) \cdot (x^2 + 2x - 8)}$

b) $\frac{(x-2)^2 \cdot (x+4)^2}{(x-2)^2 \cdot (x+4)} = \frac{(x+4)^2}{(x+4)} = \frac{6^2}{6} = \frac{36}{6} = 6$ *→ zde nejsou žádné členy, můžeme použít aritmetickou limitu*

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15}$ *nulový jmenovatel, musíme rozložit*

c) $\frac{(x-3) \cdot (x-2)}{(x-3) \cdot (x-5)} = \frac{(x-2)}{(x-5)} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) \cdot (1+2x) \cdot (1+3x) - 1}{x}$

→ zde už můžeme použít aritmetickou limitu!

$$(1+x) \cdot (1+2x) \cdot (1+3x) =$$

$$(1+x+2x+2x^2) \cdot (1+3x) =$$

$$1+x+2x+2x^2+3x+3x^2+6x^2+6x^3 =$$

$$6x^3 + 11x^2 + 6x + 1$$

d) $\frac{6x^3 + 11x^2 + 6x}{x} = 6x^2 + 11x + 6 = 6 \cdot 0 + 11 \cdot 0 + 6 = 6$

zde už zase můžeme použít aritmetickou limitu

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x \cdot (\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1}{2}$

Co je toto?

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(1+x) - (1-x)}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}}{\frac{(1+x) - (1-x)}{\sqrt[3]{1+x}^2 + \sqrt[3]{1+x} \cdot \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1-x}^2}} = \frac{\sqrt[3]{1+x}^2 + \sqrt[3]{1+x} \cdot \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1-x}^2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \frac{3}{2}$

$$(c-d) \cdot (c^2 + cd + d^2) = c^3 - d^3$$

$$(a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2$$

$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} & \frac{x + \sqrt{x + \sqrt{x}} - x}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} \cdot \frac{1/\sqrt{x}}{1/\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{\frac{x + \sqrt{x}}{x}}}{\sqrt{\frac{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}{x}} + 1} \\ & = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}} + 1} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$