

2. derivujte:

$$\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} = \left(\left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{(1-x^2)' \cdot (1+x^2) - (1-x^2) \cdot (1+x^2)'}{(1+x^2)^2} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{-2x \cdot (1+x^2) - (1-x^2) \cdot (2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{-2x - 2x^3 - 2x + 2x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \dots$$

Spočítejte limity:

AL říká $\frac{0}{0}$, to jde ale L'H

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} \stackrel{AL}{=} \frac{1}{1} = 1$

1. podmínka VLSF
cosinus je spojitá f.

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \stackrel{L'H}{\rightarrow} \frac{\cos \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{x} = \cos 0 = 1$

plati zde druhá podmínka VLSF

$f = \sin \frac{1}{x}$ $g = \frac{1}{x}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{x}\right)$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (x+3)}{(x-1) \cdot (x+1)} = \frac{x+3}{x+1} \stackrel{AL}{=} \frac{4}{2} = 2$

L'H = $\frac{2x+2}{2x} = \frac{2+2}{2} = 2$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x})} = \frac{\ln(1) \cdot \ln \sqrt{x}}{\ln(1) \cdot \ln \sqrt[3]{x}} = \frac{\ln x^{\frac{1}{2}}}{\ln x^{\frac{1}{3}}} = \frac{\frac{1}{2} \ln x}{\frac{1}{3} \ln x} = \frac{3}{2}$

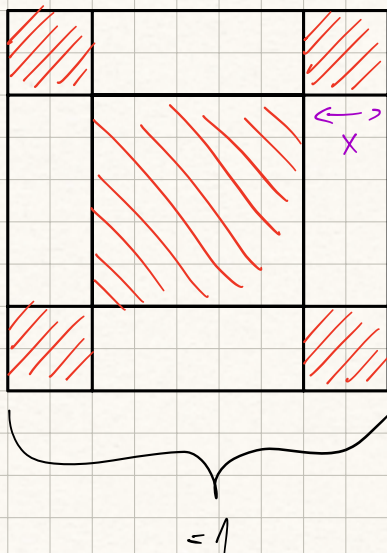
L'H = $\frac{\frac{1}{1+\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{1+\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x}}}$

= $\frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+x^{\frac{1}{2}}) \cdot x^{\frac{1}{6}}}{1+x^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^{\frac{1}{6}} + x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}} \stackrel{L'H}{=} \frac{3}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x^{\frac{5}{6}}} + \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}}{\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}} =$

$(1+x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$ $(1+x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$

= $\frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3 \cdot x^{\frac{1}{2}}} + 1 \right) = \frac{3}{2}$

= 1



Jak moc mám mít, ať maximalizuju objem.

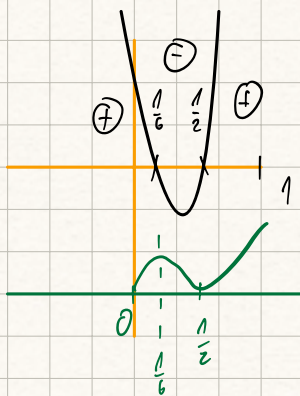
$$x \in (0, \frac{1}{2})$$

$$V = (1-2x)^2 \cdot x = (1-4x+4x^2) \cdot x = 4x^3 - 4x^2 + x = f$$

$$f' = 12x^2 - 8x + 1$$

Zajímá mě kde jsou lokální
minima, protože tam se objevují lokální extr.

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{24} = \frac{1}{2}$$



kde je to kladné,
tam je funkce rostoucí;
kde je to záporné, tam
je funkce klesající

Průběhy funkcí:

$$f(x) = x^3 - 12x + 16$$

$$Df: x \in \mathbb{R}$$

Průběhy os:

$$\text{Pro } xy = 0 - 12 \cdot 0 + 16 \quad [9, 16]$$

$$\text{Pro } xx = (x-2) \cdot (x^2 + 2x - 8) = (x-2) \cdot (x-2) \cdot (x+4) \quad \begin{matrix} [2, 0] \\ [-4, 0] \end{matrix}$$

2. Násobnost du

tobě jsme
vypočítali

$$f' = 3x^2 - 12 = 3 \cdot (x^2 - 4)$$

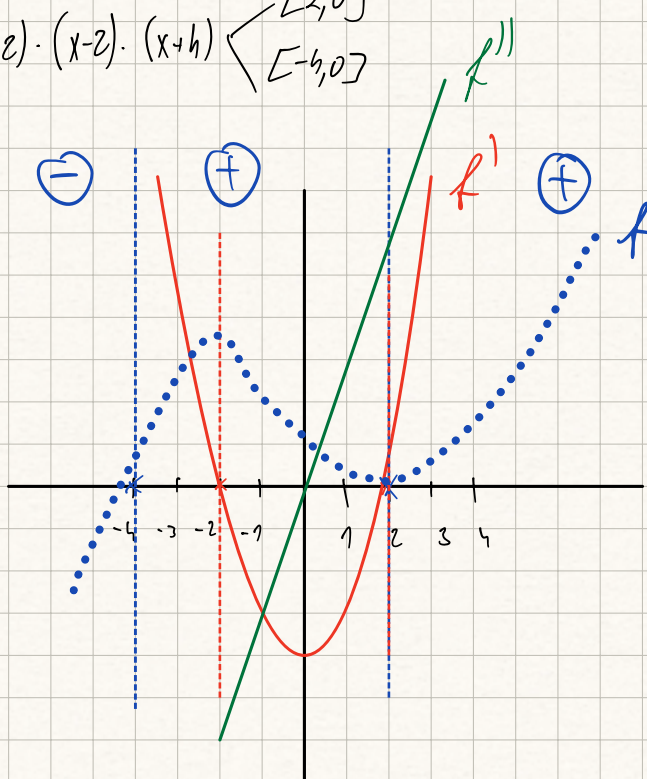
$$x_1' = 2$$

$$x_2' = -2$$

$$f'' = 6x \quad + \cup \text{ konvexní (lok. max)}$$

$$- \cap \text{ konkávní (lok. min)}$$

x je zde bodem f'



$$f(x) = \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}}$$

Def: $x \in \mathbb{R}^+$

Průsečíky:

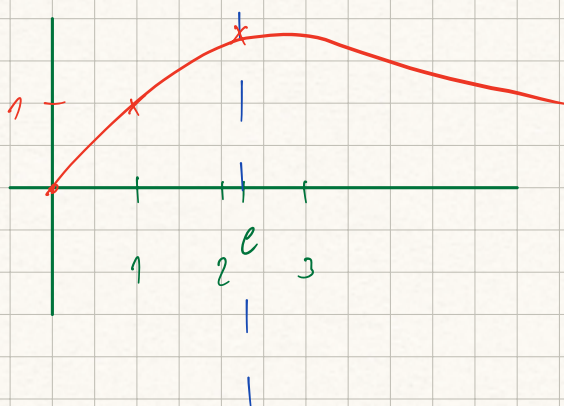
$\leq y$: neexistují

$\leq x$: neexistují

$$f' = \left(x^{\frac{1}{x}}\right)' = \left(e^{\frac{1}{x} \ln x}\right)' = e^{\frac{1}{x} \ln x} \cdot \left(\left(x^{-1}\right)' \cdot \ln x + \left(x^{-1}\right) \cdot (\ln x)'\right) = e^{\frac{1}{x} \ln x} \cdot \left(-x^{-2} \cdot \ln x + x^{-2}\right) =$$

$$= e^{\frac{1}{x} \ln x} \cdot -x^{-2} (\ln x - 1)$$

$$\ln x = 1 \rightarrow x = e$$



Mějme $f(x)$, pak v bodě x je f , pokud:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \nearrow$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \searrow$$

$$f''(x) > 0 \Rightarrow f(x) \cap \text{konkáv}$$

$$f''(x) < 0 \Rightarrow f(x) \cup \text{konvexní}$$