Funkce $f$ z množiny $A$ do $B$ je taková trojice $(A, B, f)$, že:

$f \subset A \times B$ a $\forall a \in A\ \exists!\ b \in B : afb$. Píšeme $f: A \to B$, $f(a) = b$.

– množina $A$ tvoří definiční obor, množina $B$ obor hodnot

Posloupnost je funkce $a: \mathbb{N} \to X$, kde $X$ je množina. Píšeme $(a_n) = (a_1, a_2, \dots) \subset X$

and $a_n = a(n)$, kde $n \in \mathbb{N}$.

Slovo nad abecedou $X$ je funkce $u: [n] \to X$ pro nějaké $\mathbb{N}_0$, kde $[n] := \{1, 2, \dots n\}$ a $[0] := \emptyset$.

$a_i := u(i)$ pro $i \in [n]$

Funkce je:

Prostá (injektivní), pokud $\forall a, b \in X : a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$

Na (surjektivní), pokud $f[X] = Y$ → pokrývají celou cílovou množinu

Bijektivní, pokud je Prostá a Na.

Konstantní, pokud $\exists c \in Y : \forall x \in X \cdot f(x) = c$

Identická, pokud

Složení funkce pro $f: X \to Y$ a $g: Y \to Z$ : $g \circ f = g(f) : X \to Y$

$\hookrightarrow g(f(a))$, kde $a \in X$

Lineární uspořádání je relace $<$ na množinu $A$ $(a, b, c \in A)$, která je:

1) ireflexivní: $\forall a: a \not< a$

2) tranzitivní: $\forall a, b, c: a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$

3) trichotomická: $\forall a, b: a < b \vee b > a \vee b = a$ → díky 1 a 2 nastane vždy jen jedna možnost.

Nechť máme $(A, <)$ lin. uspoř. a $B \subset A$. Pak:

$B$ je shora omezená, $\exists a \in A, \forall b \in B : b \leq a$ → tedy že existuje nějaký prvek, který je větší/roven všem v podmnožině

Pak prvek $a$ je horní mez množiny $B$. → Množinu těchto mezí značíme $H(B)$

Stejným způsobem funguje dolní omezenost a mez. $\hookrightarrow$ obdobně $D(B)$

Maximum množiny $B$ (pokud existuje) je takový prvek $b \in B$, že $\forall b' \in B : b' \leq b$.

Stejným způsobem funguje minimum. $\longrightarrow$ Značíme $MIN(B) / MAX(B)$

Nechť $(A, <)$ je lin. uspoř. a $B \subset A$.

Pokud $H(B) \neq \emptyset$ a $\exists \min(H(B))$, pak takový prvek je supremum množiny $B$.

$\Rightarrow \sup(B) := \min(H(B))$

Pokud $D(B) \neq \emptyset$ a $\exists \max(D(B))$, pak takový prvek je infimum množiny $B$.

$\Rightarrow \inf(B) := \max(D(B))$

Uspořádaným tělesem myslíme algebraickou strukturu

$$F = (F, 0_F, 1_F, +_F, \cdot_F, <_F)$$

— na množině $F$, s prvky $0$ a $1$ na $F$, operacemi $+$ a $\cdot$ na $F$, lin. usp. $<$ na $F$

takovou, že splňuje axiomy:

1) $\forall a: a +_F 0_F = a \wedge a \cdot_F 1_F = a$ $\Rightarrow$ Neutrální prvky na násobení / sčítání
2) Obě operace $+_F$ i $\cdot_F$ jsou komutativní a asociativní.
3) $\forall a,b,c: a \cdot_F (b +_F c) = (a \cdot_F b) + (a \cdot_F c)$ $\Rightarrow$ distributivita
4) $\forall a \exists b: a +_F b = 0_F$, $\forall a \neq 0_F \exists b: a \cdot_F b = 1$ $\Rightarrow$ existence inverzních prvků
5) $\forall a,b,c: a <_F b \Rightarrow a +_F c < b +_F c$, $\forall a,b: a,b >_F 0_F \Rightarrow a \cdot_F b > 0_F$

Uspořádané těleso je úplné, pokud jeho $\forall$ neprázdná a shora omezená podmnožina má supremum.

Věta: Rovnice $x^2 = 2$ nemá v $\mathbb{Q}$ řešení.

Nechť $(a/b)^2 = 2$ pro $a, b \in \mathbb{N}$. Tedy $a^2 = 2b^2$. Díky indukci můžeme předpokládat, že $a$ je minimální. Číslo $a^2$ je sudé, tedy i $a$ je sudé and $a = 2c$ pro nějaké $c \in \mathbb{N}$.

Pak ale

$$(2c)^2 = 2b^2$$
$$4c^2 = 2b^2$$
$$2c^2 = b^2$$

$\Rightarrow$ Z toho ale stejným způsobem je vidět, že i $b$ je sudé. Tím pádem $a/b$ bylo soudělné, což je spor. $\lightning$

Důsledek: Uspořádané těleso $(\mathbb{Q}, 0, 1, +, \cdot, <)$ racionálních čísel je neúplné.

$X := \{ r \in \mathbb{Q} \mid r^2 < 2 \}$ —> ukážeme, že je shora omezená, neprázdná, ale nemá supremum

– první dvě jsou jasné díky 1.

Pro spor vezmeme zlomek $s := \sup(X)$.

Když $s^2 > 2$, existuje zlomek $r > 0$, že $s - r > 0$

a stále $(s-r)^2 > 2$. Pak ale $s - r > x \; \forall x \in X$.

Spor s minimalitou suprema $s$.

Když $s^2 < 2$, existuje zlomek $r > 0$, že $(s+r)^2 < 2$ stále.

Tedy $s + r \in X$, což je spor s tím, že je $s$ horní mez množiny.

Zbývá tedy podle trichotomie $s^2 = 2$, to ale v $\mathbb{Q}$ není možné.

Existuje jediné úplné uspořádané těleso

$$R = (\mathbb{R}, 0_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}}, +_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}}, <_{\mathbb{R}}).$$

Nazýváme ho tělesem reálných čísel.

Každé dvě úplná uspořádaná tělesa jsou izomorfní.

Isomorfismus dvou úplných uspořádaných těles existuje <=>

$f(0_F) = 0_G$, $f(1_F) = 1_G$ and

$\forall x, y \in F$: $f(x +_F y) = f(x) +_G f(y)$, $f(x \cdot_F y) = f(x) \cdot_G f(y)$ and

$$x <_F y \iff f(x) <_G f(y)$$

Rovnice $x^2 = 2$ má řešení v $\mathbb{R}$.

Důkaz obdobný jako u $\mathbb{Q}$, jen poslední $s^2 = 2$ je platný krok.

Bolzano-Cauchyova věta. Nechť $a \le b$ jsou reálná čísla a $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

je taková spojitá funkce, že $f(a) f(b) \le 0$. Potom existuje $c \in [a, b]$, že $f(c) = 0$

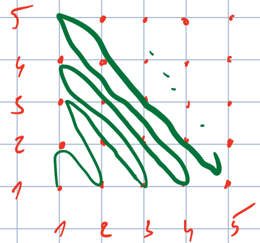
Množina $X$ je:

Spočetná, když existuje bijekce $f : \mathbb{N} \to X$

Nejvýše spočetná, když je spočetná nebo konečná.

Nespočetná, když není nejvýše spočetná.

Množina zlomků je spočetná:




→ Můžu každý zlomek jednoznačně očíslovat.

Cantorova věta: Pro žádnou množinu $X$ neexistuje surjekce $f: X \to P(X)$ z ní na její potenci.

Pro spor nechť $X$ je množina a surjektivní $f: X \to P(X)$.

Potom uvažme podmnožinu: $Y := \{x \in X \mid x \notin f(x)\} \subset X$

Protože je $f$ na, existuje takové $y \in X$, že $f(y) = Y$. Pokud $y \in Y$, podle definice množiny $Y$ platí, že $y \notin f(y) = Y$

Pokud $y \notin Y = f(y)$, má $y$ vlastnost prvků množiny $Y$ a $y \in Y$. V obou případech ↯

Důsledek: Množina $\mathbb{R}$ je nespočetná.

Sporem pomocí konečné množiny reálných čísel. Pak jim na diagonále desetinného rozvoje upravím jednu cifru a budou se tak lišit od všech ostatních. Čímž dojde ke sporu.

Základní věta algebry: Každý nekonstantní komplexní polynom $p(z)$ v $\mathbb{C}[z]$ má kořen, takové číslo $z_0 \in \mathbb{C}$, že

$$p(z_0) = 0.$$