Věta Aritmetika limit: Nechť $\lim a_n = K \in \mathbb{R}^*$ a $\lim b_n = L \in \mathbb{R}^*$. Pak

$(a_n), (b_n), (c_n)$ jsou reál. posl.

1. $\lim (a_n + b_n) = K + L$, je-li pravá strana def.
2. $\lim a_n b_n = KL$, je-li pravá strana def.
3. $\lim a_n/b_n = K/L$, je-li pravá strana def. Pro $b_n = 0 :\Leftrightarrow a_n/b_n = 0$

Tvrzení Dodatek, pokud K neexistuje

1. (a_n) omezená a $L = \lim (b_n) = \pm\infty \Rightarrow \lim (a_n + b_n) = L$
2. (a_n) omezená a $L = \lim (b_n) = 0 \Rightarrow \lim (a_n b_n) = 0$
3. (a_n) splňuje $a_n > c > 0$ pro $n \geq n_0$ a $L = \lim b_n = \pm\infty \Rightarrow \lim a_n b_n = L$
4. (a_n) omezená a $L = \lim (b_n) = \pm\infty \Rightarrow \lim (a_n/b_n) = 0$
5. (a_n) splňuje $a_n > c > 0$ pro $n \geq n_0$, $b_n > 0$ pro $n \geq n_0$ a $\lim b_n = L = 0 \Rightarrow$
$\lim a_n/b_n = +\infty$

Tvrzení: Rekurentní limita

$$a_1 = 1, \text{ pro } n \geq 2: \quad a_n = \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{1}{a_{n-1}}, \text{ pak } \lim a_n = \sqrt{2}.$$

Nechť existuje $\lim a_n = L \in \mathbb{R}$, je vlastní. Pak i $\lim a_{n-1} = L$.

$\lim \frac{1}{a_{n-1}} = \frac{1}{L}$, $\lim \frac{a_{n-1}}{2} = \frac{L}{2}$. $L = \frac{L}{2} + \frac{1}{L}$?, $L = \pm\sqrt{2}$

$$L = \frac{L^2+2}{2L}$$
$$L^2 = \frac{L^2}{2} + 1$$
$$\frac{L^2}{2} = 1 \quad \underline{L^2 = 2}$$

Když dokážeme, že konverguje, dostaneme hned $\sqrt{2}$, protože
$a_n > 0\ \forall n$, tedy $L \geq 0$.

$\Rightarrow a_n \geq a_{n+1} \Leftrightarrow \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} \Leftrightarrow \frac{a_n^2}{2} \geq 1 \Leftrightarrow a_n \geq \sqrt{2}$

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{1}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1} + 2a_{n-1}^{-1}}{2} \geq \sqrt{a_{n-1} \cdot 2a_{n-1}^{-1}} = \sqrt{2}$$

?, dokážeme, že je nerostoucí, tedy $\forall n \geq 2$ bylo $a_n \geq \sqrt{2}$

Tvrzení **Geometrická posloupnost:** Pro číslo $q \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \dots\ |q| < 1,\ \text{tj. } q \in (-1,1) \\ 1 & \dots\ q = 1 \\ +\infty & q > 1 \\ \text{neexistuje} & q \leq -1 \end{cases}$$

1) Nechť $|q| < 1$. Zároveň lze předpokládat $q \geq 0$. Potom je (q^n) nerostoucí, zdola omezená ($q^n \geq 0$) a podle věty o monotónní posl. má nezápornou vlast. limitu L. Protože $q^n = q \cdot q^{n-1}$,

$$L = q \cdot L \rightsquigarrow \frac{0}{1-q} = 0$$

2) Jde o limitu konstantní posloupnosti

3) Nechť $q > 1$. → Podle 1. části zde a tvrzení o aritmetice limit

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1/q)^n} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

4) Pro $q \leq -1$ má q^n podposloupnosti s odlišnými limitami, tedy neexistuje.

Věta **Limita a uspořádání:** Nechť $K, L \in \mathbb{R}^*$ a $(a_n), (b_n)$ jsou dvě reálné posl. s $\lim a_n = K$ a $\lim b_n = L$. Platí následující:

1) Když $K < L$, tak existuje n_0, že pro každé dva (ne nutně stejné) indexy $m, n \geq n_0$ je $a_m < b_n$
2) Když $\forall n_0$ existují indexy m a n, že $m, n \geq n_0$ a $a_m \geq b_n$, pak $K \geq L$.

1) Nechť $K < L$. Pak existuje $\varepsilon : U(K,\varepsilon) < U(L,\varepsilon)$. Podle def. lim. máme n_0:

$m, n \geq n_0 \Rightarrow a_m \in U(K,\varepsilon)$ a $b_n \in U(L,\varepsilon)$. Tedy $m, n \geq n_0 \Rightarrow a_m < b_n$

2) $a \Rightarrow b \;=\; !b \Rightarrow !a$

Uzavřený interval

$I(a,b) = [a,b]$ pro $a \leq b$, $I(a,b) = [b,a]$ pro $b \leq a$

Množina M je **konvexní**, pokud $\forall a, b \in M : I(a,b) \subset M$

Tvrzení **O intervalech:** Konvexní množiny reálných čísel jsou právě a jenom $\emptyset$, singletony $\{a\}$, celé $\mathbb{R}$, intervaly (a,b), $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$, $(a, b\rangle$, $\langle a, b\rangle$, $\langle a, b)$, $(-\infty, a\rangle$, $\langle a, +\infty)$ pro reálná $a < b$.

↳ Například každé okolí $U(A,\varepsilon)$ je konvexní, žádné prstencové není konvexní

Věta O dvou policajtech: Nechť $a \in \mathbb{R}$ a (a_n), (b_n) a (c_n) jsou takové tři reálné posl., že

$$\lim a_n = \lim c_n = L \ \wedge \ \forall n \geq n_0 : b_n \in I(a_n, c_n),$$

$$\text{pak i } \lim b_n = L$$

Nechť je dáno ε. Podle def. lim. $\exists n_0$ t.ž. $n \geq n_0 \Rightarrow a_n, c_n \in U(L, \varepsilon)$.

Díky konvexitě okolí $U(L,\varepsilon)$ je $n \geq n_0 \Rightarrow I(a_n, c_n) \subset U(L, \varepsilon)$

Díky předpokladu tak $n \geq n_0 \Rightarrow b_n \in U(L, \varepsilon)$ a $b_n \to L$.

Pro nevlastní limitu stačí jen jeden strážník:
$\lim a_n = -\infty$, $b_n \leq a_n \ \forall n \geq n_0$, pak
$\lim b_n = -\infty$
Obdobně pro $+\infty$

Hromadný bod: Nechť $A \in \mathbb{R}^*$ a $(a_n) \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že A je hromadný bod posloupnosti (a_n), pokud má (a_n) podposloupnost (a_{m_n}) s $\lim a_{m_n} = A$.

$$\text{Položíme } H(a_n) := \{A \in \mathbb{R}^* \mid A \text{ je hromadný bod } (a_n)\} \subset \mathbb{R}^*$$

Lim Inf a_n je nejmenší prvek množiny $H(a_n)$ v lin. usp. $(\mathbb{R}^*, <)$.
Lim Sup a_n je největší prvek množiny $H(a_n)$ v lin. usp. $(\mathbb{R}^*, <)$.

Věta Liminf a Limsup: Pro libovolnou reál. posl. (a_n) je množina $H(a_n)$ neprázdná a má v lin. usp. $(\mathbb{R}^*, <)$ minimum a maximum.

Nechť (a_n) je reál. posl. Tím pádem má podposl. s limitou, tedy $H(a_n) \neq \emptyset$.

Dokážeme pouze existenci max, min se dělá obdobně.

Mohou nastat 4 případy $A \in \mathbb{R}^*$:

① $H(a_n) = \{-\infty\}$, pak $A = -\infty$

② Pokud $+\infty \in H(a_n)$, pak $A = +\infty$

③ Pokud $H(a_n) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ a je shora neomezená, pak $A = +\infty$

④ Pokud $+\infty \notin H(a_n)$ a $H(a_n) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ a shora omezená, pak $A := \sup(H(a_n) \cap \mathbb{R}) \in \mathbb{R}$.

Nyní ukážeme, že jde vždy o max. V případě 1 a 2 je to jasné. V případě 3 a 4 platí:

$A \geq h \ \forall h \in H(a_n)$, tedy stačí dokázat, že $A \in H(a_n)$. Zároveň platí: $(b_n) \subset H(a_n) \cap \mathbb{R}$ s $\lim b_n = A$.

Protože každé číslo je lim. nějaké podposl. posl. (a_n), snadno nalezneme její takovou podposloupnost

(a_{m_n}), že: $\forall n: a_{m_n} \in U(b_n, 1/n)$. Pak ale $\lim a_{m_n} = \lim b_n = A$ a $A \in H(a_n)$

Věta: Vlastnosti Liminfu a Limsupu: Pro libovolnou reálnou posloupnost (a_n) platí následující

1) Když $\lim a_n$ existuje, $H(a_n) = \{\lim a_n\}$

2) Nastávají tři exkluzivní případy pokrývající všechny možnosti:

a) (a_n) je shora neomezená and $\limsup a_n = +\infty$

b) $\lim a_n = -\infty$ a $\limsup a_n = -\infty$

c) $\limsup a_n$ je vlastní a $\limsup a_n = \lim\limits_{n \to \infty} (\sup(\{a_m \mid m \geq n\})) \in \mathbb{R}$.

3) Nastávají tři exkluzivní případy pokrývající všechny možnosti:

a) (a_n) je zdola neomezená a $\liminf a_n = -\infty$

b) $\lim a_n = +\infty$ a $\liminf a_n = +\infty$

c) $\liminf a_n = \lim\limits_{n \to \infty} (\inf(\{a_m \mid m \geq n\})) \in \mathbb{R}$

4) Vždy $\liminf a_n \leq \limsup a_n$ and rovnost nastává $\iff \exists \lim a_n$ a pak

$$\liminf a_n = \limsup a_n = \lim a_n$$

Nekonečná řada rozumíme opět posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$. Jejím součtem rozumíme limitu

$$\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots := \lim (a_1 + a_2 + \ldots + a_n), \text{ když existuje.}$$

Posloupnost $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ je tvořena tzv. částečnými součty (řady).