

1) Funkce, prostá, na a bijekce:

Funkce $f: A \rightarrow B$ je $\forall (A, B, f)$, že $f \subset A \times B$ a $\forall a \in A \exists! b \in B$.

Prostá, pokud $\forall a, b \in A: a \neq b \rightarrow f(a) \neq f(b)$

Na, pokud $f[X] = Y$

Bijekce, pokud prostá a na.

2) Supremum, Infimum, lin. uspořádání $\rightarrow$ relace $<$ na množině, transitivní, reflexivní, trichotomická

Supremum: minimum horních mezí množiny $:= \min(H(X))$

Infimum: maximum dolních mezí množiny $:= \max(D(X))$

Meze: Necht' $B \subset A$.

Horní: pokud $a \in A: \forall b \in B \quad b \leq a$

Dolní: pokud $a \in A: \forall b \in B \quad b \geq a$

3) (Ne)jízse spčetní a nespčetní množiny

Množina X je rekurenční, pokud existuje prostá $f: \mathbb{N} \rightarrow X$, jímž je konstruována.

$\rightarrow$ dokonce i věty, jak je velká, rozhodnout můžeme.

Množina X je spčetná, když existuje bijekce $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ $\rightarrow$ můžeme je číslit

Množina X je nejízse spčetná, když je konstruována nebo spčetná.

Množina X je nespčetná, pokud není nejízse spčetná.

4) Vlastní / nevlastní limita posl., pol. posl.

Neht' (a_n) je reálná posl. a $L \in \mathbb{R}^*$. Pokud

$\rightarrow$ Pokud je vlastní, tak $\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \exists n_0: n \geq n_0 \rightarrow |a_n - a| < \epsilon$

$\forall \epsilon \exists n_0: n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U(L, \epsilon)$, pak $\lim a_n = L$

$L \in \mathbb{R} \Rightarrow$ lim. je vlastní $\Rightarrow$ posl. konverguje

$L = \pm \infty \Rightarrow$ lim. je nevlastní $\Rightarrow$ posl. diverguje.

$\rightarrow$ Pokud je nevlastní, $\forall \epsilon \exists n_0: n \geq n_0 \quad a_n < \epsilon - \infty$
nebo
 $a_n > \epsilon + \infty$

Posl. (b_n) je pol. posl. (a_n) , pokud $\exists$ posl. $m_1 < m_2 < \dots$, že $\forall n$:

$b_n = a_{m_n}$. Značíme $(b_n) \leq (a_n)$

5) lim inf a lim sup posloupnosti

Hromadný bod: Necht' $A \in \mathbb{R}^*$, $(a_n) \subset \mathbb{R}$. A je hromadný bod posl. (a_n) , pokud $\forall \epsilon (a_n)$ podposl. (a_{n_k}) , že $\lim a_{n_k} = A$.

$$H(a_n) := \{A \in \mathbb{R}^* \mid A \text{ je hromadný bod } (a_n)\} \subset \mathbb{R}^*$$

$\liminf (a_n)$ je nejmenší prvek z $H(a_n)$ v lin. usp. $(\mathbb{R}^*, <)$

$\limsup (a_n)$ je největší -11-

6) Řady, číselný součet řady, součet řady

$$\text{Řada } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots := \lim (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

- posl. je tvrzení číselný součet řady

$$\text{Součet řady} := \lim \text{posl. číselných součtů} := \lim s_n := \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \in \mathbb{R}^*$$

$$\text{Harmonická řada: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots, \text{ diverguje, má součet } = +\infty$$

7) Geometrická řada, absolutně konvergentní řada

Absolutně konvergentní řada: konverguje-li $\sum |a_n|$.

$$\text{Geometrická řada: pro } q \leq -1 \text{ nemá součet, pro } q < 1 \text{ má součet } \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

$$\text{pro } q = 1 \text{ má součet } +\infty$$

$$\hookrightarrow \text{resp. } q \in (-1, 1) \Rightarrow q^0 + q^1 + \dots = \frac{q^0}{1-q}$$

8) Limita funkce, jednostranná lim. funkce

Limita

Neht' $A, L \in \mathbb{R}^*$, $M \subset \mathbb{R}$, A je lin. bod množiny M , $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce.

Pokud $\forall \epsilon \exists \delta: f[P(A, \delta) \cap M] \subset U(L, \epsilon)$, píšeme: $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = L$

Jednostranná:

Neht' $a \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}^*$, $M \subset \mathbb{R}$, a je levý (první) lin. bod množiny M a $f: M \rightarrow \mathbb{R}$.

Pokud $\forall \epsilon \exists \delta: f[P(a, \delta) \cap M] \subset U(L, \epsilon)$, píšeme: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$

(stejně to funguje obráceně)

9) Exponenciála, Logaritmus, cosinus, sinus

$$e^x = \exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$\hookrightarrow$ je All pro $\forall x \in \mathbb{C} : n > |x|$

$$\exp(0) = 1$$

$$\exp(x) > 0, \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

$\exp$ je monotóní

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$$

$$\log := \exp^{-1} : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\cos x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

} All $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\log(1) = 0$$

$$\log(xy) = \log x + \log y$$

$\log$ je monotóní

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \log(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x) = +\infty$$

10) Spojitost funkce v bode, jednostranná...

Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Funkce f je spojitá v bode a , pokud

$$\forall \varepsilon \exists \delta : f[U(a, \delta) \cap M] \subset U(f(a), \varepsilon).$$

Pokud bude jednostranná, nahradí se $U(a, \delta)$ za $P^+(a, \delta)$

11) Asymptotické symboly

O : Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$, $N \subset M$. Pokud

$$\exists c > 0 \forall x \in N : |f(x)| \leq c |g(x)|, \text{ pak } f(x) = O(g(x))$$

Nechť $A \in \mathbb{R}^*$ je lín. bod množiny $M \subset \mathbb{R}$, $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$, $g \neq 0$ na $P(A, \delta) \cap M$ pro nějaký δ

1) Pro $\lim_{x \rightarrow A} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ píšeme $f(x) = o(g(x)) \quad (x \rightarrow A)$

2) Pro $\lim_{x \rightarrow A} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ píšeme $f(x) \sim g(x) \quad (x \rightarrow A)$

12) Kompaktní, otevřený, uzavřený a omezený množiny

Množina $M \subset \mathbb{R}$ je kompaktní, když $\forall (a_n) \subset M$ má konvergentní podposl. (a_{n_k}) s $\lim a_{n_k} \in M$.

Množina $M \subset \mathbb{R}$ je omezená, když $\exists c \forall a \in M: |a| < c$

- II - je uzavřený, $\forall (a_n) \subset M: \lim a_n = a \in M$

- II - je otevřený, $\forall a \in M \exists \delta: U(a, \delta) \subset M$

Množina $M \subset \mathbb{R}$ je uzavřený $\Leftrightarrow \mathbb{R} \setminus \{M\}$ je otevřený

- II - je kompaktní $\Leftrightarrow M$ je omezená a uzavřená

13) Globální, lokální a ostrí extrém

Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$ a $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. f má v a na M glob. maximum, resp. minimum, když:

$$\forall x \in M: f(x) \leq f(a), \text{ resp. } f(x) \geq f(a).$$

Funkce f má lokální maximum, resp. minimum, když:

$$\exists \delta \forall x \in U(a, \delta) \cap M: f(x) \leq f(a), \text{ resp. } f(x) \geq f(a).$$

Ostrý je to tehdy, pokud platí ostré nerovnosti v definici.

14) Derivace funkce, jednostranná derivace

Nechť $a \in M$ je lim. bod množ. $M \subset \mathbb{R}$ a $f := f(x): M \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce.

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a) := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \stackrel{\text{KASF}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Nechť $a \in M$ je levý, resp. pravý limitní bod množiny $M \subset \mathbb{R}$, $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce.

$$f'_-(a) := \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{resp.}$$

$$f'_+(a) := \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Jakmile máme dvě stejná jednostranná, i celková bude stejná. Pokud máme celková, alespoň jedno jednostranná bude stejná.

15) Standardní definice tečny

Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$ je lim. bod množiny M , $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ diffeomorfismus.

Tečnou ke grafu f v bodě $(a, f(a)) \in G_f$ rozumíme přímku ℓ danou rovnicí

$$\ell: y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$$

Tečny přímka se směrnicí $f'(a)$

$$f'(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'(a) \cdot (x - a) + f(a) = f(x)$$

16) Derivace vyšších řádů

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdné otevřené množině a $f = f(x): M \rightarrow \mathbb{R}$. Pro $n \in \mathbb{N}_0$ definujeme indukci koncovou či nekonečnou posloupnost funkcí $f^{(n)}(x): M \rightarrow \mathbb{R}$.

$$1) f^{(0)}(x) := f(x)$$

$$2) \text{ pro } n > 0:$$

Pokud $f^{(n-1)}(x)$ je def. a má $\forall a \in M$ vlastní derivaci, pak $\forall a \in M$ def. hodnotu n -té funkce jako:

$$f^{(n)}(a) := (f^{(n-1)}(x))'(a)$$

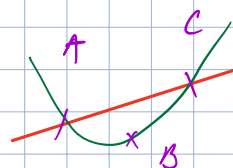
17) Konvexnost / Konkávnost (V / A)

Nechť $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce def. na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Je (n, I) konvexní, pokud

$\forall a < b < c$ v I platí:

$$(b, f(b)) \leq \ell(a, f(a), c, f(c))$$

Jde-li o ostrou nerovnost, je to ryze konvexní.



18) Inflexní bod

Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$ je obl. v M , $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, ℓ je tečnou k G_f v $(a, f(a))$.

Bod a je inflexní, pokud:

$$\exists \delta \forall x \in P^-(a, \delta) \cap M \text{ a } \forall x' \in P^+(a, \delta) \cap M:$$

$$(x, f(x)) \leq \ell \leq (x', f(x')) \quad , \text{ resp. i opačným nerovnostem.}$$

1a) Svislé asymptoty a asymptoty v nekonečnu

Svislé asymptoty:

První funkce obdívá.

Necht' $M \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ je levý limitní bod M , $f: M \rightarrow \mathbb{R}$.

Udělá $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm \infty$, nazveme přímkou $x=b$ levou svislou asymptotou.

Asymptoty v nekonečnu:

$\sqrt{-\infty}$ funkce podobně.

Necht' $M \subset \mathbb{R}$, $+\infty$ je lim. bod M , $s, b \in \mathbb{R}$ a $f: M \rightarrow \mathbb{R}$. Udělá:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - sx - b) = 0$, nazveme přímkou $y = sx + b$
asymptotou v $+\infty$.

2a) Taylorův polynom funkce, Taylorova řada funkce

TP funkce:

Necht' je $n \in \mathbb{N}_0$, funkce $f: U(b, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ má vlastní $f^{(n)}(b) \in \mathbb{R}$. Pro $n=0$ se rozumí
spjitost v b .

Pak existuje právě jeden polynom

$$p(x) := \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(b) \cdot (x-b)^j}{j!}, \text{ je } \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x) - p(x)}{(x-b)^n} = 0$$

TR funkce:

Necht' $f: U(a, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ má $\forall n \in \mathbb{N}$ vlastní $f^{(n)}: U(a, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$.

Pak pro $\forall x \in U(a, \delta)$ se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$, řečeno, že f je m $U(a, \delta)$

součtem své Taylorovy řady se středem v a .

Taylorovy polynomy jsou tedy určitě součty řad.

Chytl Taylorův polynom $R_n^{f,a}(x) = f(x) - T_n^{f,a}(x)$, $x \in U(a, \delta)$

21) Primitivní funkce

Pro funkci $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ def. na nek. int. $I \subset \mathbb{R}$ uvažujeme, že F je prim. fce k f ,
píšeme $F = \int f$, pokud F má na I vlastní derivaci α :

$$\forall b \in I: F'(b) = f(b)$$

22) Stejněměrná spojitost

Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Funkce $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ je stejněměrně spojitá (na M), pokud:

$$\forall \varepsilon \exists \delta: a \in M \Rightarrow f[U(a, \delta) \cap M] \subset U(f(a), \varepsilon).$$

Jediné δ zde musí platit pro všechny body v M .

23) Obecný Newtonův integrál

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ s $a < b$ a $F, f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, kdy $F'(x) = f(x)$.

Newtonův integrál funkce f přes (a, b) definujeme jako:

$$(N) \int_a^b f = F(b) - F(a) := \lim_{x \rightarrow b} F(x) - \lim_{x \rightarrow a} F(x), \text{ jestliže poslední dvě limity existují a jsou konečné.}$$

To se, btw, rovná placi pod grafem f_x .

Obecný:

Nechť $A < B \in \mathbb{R}^*$ a $F, f: (A, B) \rightarrow \mathbb{R}$, kdy F je prim. k f .

Newtonův integrál def. jako:

$$(N) \int_A^B f = F(B) - F(A) := \lim_{x \rightarrow B} F(x) - \lim_{x \rightarrow A} F(x), \text{ jestliže poslední dvě limity existují a jsou vlastní.}$$

Lobecnější zobrazení. Položíme $B \leq A$.

$$\text{Pak } (N) \int_A^A f := 0, \quad (N) \int_A^B f = -(N) \int_B^A f.$$

24) Riemannův integrál

Řekneme, že $f: [a, b]$ je Riemannovsky integrovatelná, ($f \in \mathcal{R}(a, b)$), pokud:

$\exists L \in \mathbb{R}: \forall \varepsilon \exists \delta: \text{pro jakéhokoliv dělení } P \text{ int. } [a, b] \text{ s jakéhokoliv test. body } \bar{f} \in P \text{ platí:}$

$$\Delta(P) < \delta \Rightarrow |R(\bar{f}, f) - L| < \varepsilon. \text{ Pak také píšeme}$$

$$(R) \int_a^b f = L \quad \text{nebo} \quad (R) \int_a^b f(x) dx = L$$

25) Heine-Stech-Weierstrass integrál

Funkce $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \in HK(a, b)$, pokud $\exists L \in \mathbb{R}$, že $\forall \varepsilon \exists \delta_\varepsilon$, kde δ_ε je klibr na $[a, b]$, že $\forall$ dělení P int. $[a, b]$ a fest. $\bar{f} \in P$ platí:

$$P \text{ a } \bar{f} \text{ jsou } \delta_\varepsilon\text{-jemné} \Rightarrow |R(P, \bar{f}, f) - L| < \varepsilon.$$

$$(HK) \int_a^b f = L$$

26) Délka grafu funkce, plocha mezi grafy, objem rotačního tělesa

Délka grafu:

Nechť $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ má na (a, b) vlastní $f' \in R(a, b)$. Funkce f má být rektifikovatelná
žně s délkou

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2}$$

$$L(f) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \left| (a_{i-1}, f(a_{i-1})) (a_i, f(a_i)) \right| \mid (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{D}(a, b) \right\}$$

Plocha mezi grafy:

Nechť $f, g \in R(a, b)$ a $f \leq g$ na $[a, b]$.

$$\text{Pak plocha } \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b] \wedge f(x) \leq y \leq g(x) \} := \int_a^b (g(x) - f(x))$$

Objem rotačního tělesa:

Nechť funkce $f \in R(a, b)$ a je nezáporná.

$$\text{Pak objem } (V(a, b, f)) := \pi \int_a^b f^2$$

Obvlnění - πr^2