Derivace funkce Nechť $a \in M$ je lim. bod $M \subset \mathbb{R}$ a $f = f(x): M \to \mathbb{R}$.

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

a řekneme, že tato limita $f'(a) = \frac{df}{dx}(a) \in \mathbb{R}^*$ je derivace f v bodě a.

Jednostranné derivace Nechť je $a \in M$ levý, resp. pravý, lim. bod $M \subset \mathbb{R}$, $f: M \to \mathbb{R}$. Definujeme

$$f'_-(a) := \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(a)}{h}.$$

Opět platí, pokud $f'_-(a) \neq f'_+(a)$, pak $f'(a)$ neexistuje.

Pokud má $f(a)$ derivaci, pak se jí rovná alespoň jedna jednostranná derivace.

Definice OLB: Bod $a \in M$ je oboustranný limitní bod množiny $M \subset \mathbb{R}$, pokud

$$\forall \delta: P^-(a, \delta) \cap M \neq \emptyset \neq P^+(a, \delta) \cap M$$

$\to$ Má libovolně daleko od sebe další body množiny.

Věta **Příznak extrému**: Nechť $b \in M$ je OLB množiny $M \subset \mathbb{R}$ a ať $f: M \to \mathbb{R}$: $f'(b) \in \mathbb{R}^*$ existuje a $\neq 0$.

Potom:

$$\forall \delta \, \exists c, d \in U(b, \delta) \cap M: f(c) < f(b) < f(d)$$

Tedy že f nemá v bodě b lokální extrém.

Nechť je dáno δ. Předpokládejme $f'(b) < 0$, obrácený případ je podobný.

Vezmu tak malé ε, že $U(f'(b), \varepsilon) < \{0\}$ (tj. $y \in U(f'(b), \varepsilon): y < 0$).

Nyní podle definice derivace musí existovat θ t.ž.

$$x \in P(b, \theta) \cap M \Rightarrow \frac{f(x) - f(b)}{\underbrace{x - b}_{<0}} \in U(f'(b), \varepsilon).$$

Můžeme předpokládat $\theta \leq \delta$ a vzít:

$c \in P^+(b, \theta) \cap M$ a $d \in P^-(b, \theta) \cap M$. Oba existují, jelikož b je OLB.

Dostáváme $c, d \in U(b, \delta) \cap M: f(c) < f(b) < f(d)$.

Tvrzení **Derivace a spojitost:** Nechť $b \in M \subset \mathbb{R}$ je lim. bod množiny M a $f: M \to \mathbb{R}$ je funkce. Má-li f vlastní derivaci $f'(b) \in \mathbb{R}^*$, je f v b spojitá.
Totéž platí pro obě jednostranné derivace a odpovídající jednostranné spojitosti.

Podle věty o aritmetice limit

$$\lim_{x \to b} f(x) = \lim_{x \to b} \left(f(b) + (x-b) \cdot \frac{f(x)-f(b)}{x-b} \right)$$

$$= \lim_{x \to b} f(b) + \lim_{x \to b} (x-b) \cdot \lim_{x \to b} \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$$

$$= f(b) + 0 \cdot f'(b)$$

$$= f(b)$$ $\Rightarrow$ Tím pádem je spojitá v b.

Existence nevlastní limity $\not\Rightarrow$ spojitost v bodě

Spojitost v bodě $\not\Rightarrow$ existence derivace

Tvrzení (c' a $(x^n)'$) Platí následující vzorce:

1) Je-li pro $c \in \mathbb{R}$ pomocí $f_c : \mathbb{R} \to \{c\}$ označena konst. funkce s hodnotou c, pak $\forall a \in \mathbb{R} : f_c'(a) = 0$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$ a $\forall a \in \mathbb{R}$:
$$(x^n)'(a) = n a^{n-1}$$

1) $$f_c'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f_c(x) - f_c(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{c-c}{x-a} = \lim_{x \to a} 0 = 0$$

2) Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$. Pak:

$$(x^n)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a) \cdot (x^{n-1} + x^{n-2}a + \ldots a^{n-1})}{(x-a)}$$

$$= \lim_{x \to a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + \ldots + a^{n-1})$$

$$\overset{AL}{=} a^{n-1} + a^{n-1} + \ldots + a^{n-1} = n \cdot a^{n-1}$$

Graf funkce $f: M \to \mathbb{R}$ je množina bodů v rovině: $G_f := \{(x, f(x)) \mid x \in M\} \subset \mathbb{R}^2$

Standardní definice tečny: Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$ je limitní bod M and $f: M \to \mathbb{R}$, které je v a diferencovatelná. Tečnou ke grafu f v bodě $(a, f(a)) \in G_f$ rozumíme přímku ℓ danou rovnicí:

$$\ell: y = f'(a) \cdot (x-a) + f(a)$$

Tvrzení Linearita derivací: Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$ je lim. bod M, $f, g: M \to \mathbb{R}$ a $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Potom rovnost:

1) $$(\alpha f(x))'(a) = \alpha f'(a)$$ platí kdykoliv je jedna strana definovaná

a rovnost

2) $$(f(x) + g(x))'(a) = f'(a) + g'(a)$$ platí kdykoliv je pravá strana definovaná.

Podle AL

1)
$$(\alpha f(x))'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\alpha f(x) - \alpha f(a)}{x-a} = \alpha \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \alpha f'(a).$$

2) Nechť $h(x) := f(x) + g(x)$.

$$h'(x) = \lim_{x \to a} \frac{h(x) - h(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) + g(x) - f(a) - g(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a}$$
$$= f'(a) + g'(a).$$

Je-li poslední výraz definovaný v aritmetice $\mathbb{R}^*$. Pro jednostranné jsou výpočty stejné.

Věta Leibnizův vzorec: Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$, je lim. bod M a nechť $f, g: M \to \mathbb{R}$ jsou funkce. Když je f nebo g spojitá v a, pak:

$$(fg)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a),$$ je-li pravá strana definována.

Nechť je g spojitá v a:

$$(fg)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{(f(x) - f(a))g(x) + f(a)(g(x) - g(a))}{x-a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \cdot \lim_{x \to a} g(x) + f(a) \cdot \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

g je spojitá v a.

Tvrzení: Derivace podílu: Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$ je lim. bod M and $f, g: M \to \mathbb{R}$ jsou funkce.

Když $g(a) \neq 0$ a g je spojitá v a:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g(a)^2}$$

Věta: Derivace složené funkce: Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$ je limitní bod množiny M, $g: M \to N$ spojitá v a, s derivací $g'(a) \in \mathbb{R}^*$ a taková, že $g(a) \in N$ je limitní bod $N \subset \mathbb{R}$ a nechť $f: N \to \mathbb{R}$ je funkce s derivací $f'(g(a)) \in \mathbb{R}^*$.

Pak složená funkce $f(g): M \to \mathbb{R}$ má derivaci

$$(f(g))'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$$ je-li tento součin definovaný.

Věta: Derivace inverzní funkce: Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$ je lim. bod M, $f: M \to \mathbb{R}$ je prostá funkce s derivací $f'(a) \in \mathbb{R}^*$ a inverzní funkce $f^{-1}: f[M] \to M$ je spojitá v $b := f(a)$. Potom platí následující:

1) Když $f'(a) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pak f^{-1} má derivaci

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

2) Když $f'(a) = 0$ a f roste (resp. klesá) v bodě a, pak f^{-1} má derivaci:

$$(f^{-1})'(b) = +\infty, \text{ (resp. } (f^{-1})'(b) = -\infty)$$

3) Když $f'(a) = \pm\infty$ a b je lim. bod množiny $f[M]$, pak f^{-1} má derivaci:

$$(f^{-1})'(b) = 0.$$

Tvrzení Nespojitá derivace:

Funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kde $f(x) := x^2 \sin(1/x)$ pro $x \neq 0$ a $f(0) = 0$ má všude definovanou derivaci:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin(1/x) - \cos(1/x) & \dots \quad x \neq 0 \\ 0 & \dots\dots \quad x = 0 \end{cases}$$

když je nespojitá v 0.

Pro $x \neq 0$ vypočítám pomocí Leibnitze a pravidel

Pro $x = 0$ spočítám limitu podle definice