Pro interval I v Newtonovském integrálu povolíme $B \leq A$. Položme $(N)\int_A^A f := 0$.

Pak platí: $(N)\int_A^B f = -(N)\int_B^A f$

Tvrzení Aditivita integrálu: Pokud $A, B, C \in \mathbb{R}^*$ a $f \in N(\min(A,B,C), \max(A,B,C))$, pak

$$(N)\int_A^C f = (N)\int_A^B f + \int_B^C f$$

Tvrzení linearita integrálu: Pokud $A, B \in \mathbb{R}^*$, $a, b \in \mathbb{R}$ a $f, g \in N(\min(A,B), \max(A,B))$, pak:

$$(N)\int_A^B (af + bg) = a \cdot (N)\int_A^B f + b \cdot (N)\int_A^B g$$

Věta $(N)\int_A^B$ per partes: Nechť $f, g, F, G : (A,B) \to \mathbb{R}$, F prim k f, G ... g.

Pak rovnost:

$$\underbrace{(N)\int_A^B fG}_{T_1} = \underbrace{[FG]_A^B}_{T_2} - \underbrace{(N)\int_A^B Fg}_{T_3}$$

platí vždy, když jsou definovány 2 ze tří členů

Věta $(N)\int_A^B f$ substitucí: Nechť $A < B$, $C < D \in \mathbb{R}^*$, $g : (A,B) \to (C,D)$, $f : (C,D) \to \mathbb{R}$ a g má vlastní g' na (A,B). Pak platí následující:

1) Předpokládejme, že f má na (C,D) prim. funkci F. Pak rovnost

$$(N)\int_A^B f(g) \cdot g' = (N)\int_{g(A)}^{g(B)} f$$

platí, pokud je pravá strana def.

2) Pokud je g a $g' \neq 0$ na (A,B), pak rovnost

$$(N)\int_C^D f = (N)\int_{g^{-1}(C)}^{g^{-1}(D)} f(g) \cdot g'$$

platí, pokud je pravá strana def.

Věta $\int r(x)$: Pro $\forall$ racionální $r = r(x)$ $\exists R(x)$ tvaru:

$$R(x) = r_0(x) + \sum_{i=1}^{k} s_i \cdot \log(|x-\alpha_i|) + \sum_{i=1}^{l} t_i \cdot \log(a_i(x)) + \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot \arctan(b_i(x)),$$

kde $r_0(x)$ je rac. funkce, $k, l, m \in \mathbb{N}_0$, prázdné součty jsou def. jako 0, $s_i, t_i, u_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \in Z(r)$, $a_i(x)$ jsou ireducibilní trojčleny a $b_i(x)$ jsou reálné nekonstantní polynomy, že:

$$R(x) = \int r(x) \quad \text{na každém netriviálním } I \subset Def(r)$$

Věta Zvaly: Každý nekonstantní komplexní polynom $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ má alespoň jeden kořen, takové číslo $\alpha \in \mathbb{C}$, že $p(\alpha) = 0$.

Důsledek Rozklady reálných polynomů: Každý nenulový reálný polynom $q(x)$ lze zapsat jako:

$$q(x) = c \cdot \prod_{i=1}^{k} (x-\alpha_i)^{m_i} \cdot \prod_{i=1}^{l} a_i(x)^{n_i},$$

kde $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je jeho vedoucí koeficient, $k, l \in \mathbb{N}_0$, prázdné součiny jsou def. jako 1, $m_i, n_i \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ jsou všechny různé reálné kořeny $q(x)$ a $a_i(x)$ jsou vzájemně různé ireducibilní trojčleny.

Tvrzení Bachetova identita: Nechť $p(x)$ a $q(x)$ v $\mathbb{R}[x]$ jsou dva polynomy bez společného komplexního kořene, tj. pro žádné $z \in \mathbb{C}$ neplatí, že $p(z) = q(z) = 0$. Pak existují takové polynomy $r(x), s(x) \in \mathbb{R}[x]$, že

$$r(x) \cdot p(x) + s(x) \cdot q(x) = 1$$

Pro dané $p(x)$ a $q(x)$ uvažme množinu reálných polynomů:

$$S := \{ r(x) \cdot p(x) + s(x) \cdot q(x) \mid r(x), s(x) \in \mathbb{R}[x] \}$$

Vezmeme nenulový $f(x) \in S$ s nejmenším stupněm. Libovolný $a(x) \in S$ dělíme $f(x)$ se zbytkem:

$$a(x) = f(x) \cdot b(x) + c(x), \quad \text{kde } b(x), c(x) \in \mathbb{R}[x] \text{ a } \deg(c(x)) < \deg(f(x)),$$

nebo $c(x)$ je nulový polynom. Ale $c(x) = a(x) - b(x) \cdot f(x) \in S$, tedy je nulový.

Tedy $a(x) = b(x) f(x) - f(x)$ dělí každý prvek v S. Proto i $p(x), q(x)$. Ty ale nemají žádný společný komplexní kořen, proto $f(x)$ musí být nenulový konst. polynom. Můžeme předpokládat, že $f(x) = 1$, čímž jsme získali identitu.

Věta Parciální zlomky: Každou racionální funkci $r(x) = p(x)/q(x) \in \mathbb{R}(x)$, se jmenovatelem rozloženým na součin reálných polynomů, lze vyjádřit ve tvaru:

$$r(x) = s(x) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\beta_{i,j}}{(x-\alpha_i)^j} + \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\gamma_{i,j} x + \delta_{i,j}}{q_i(x)^j},$$

kde $s(x) \in \mathbb{R}[x]$ je polynom, k, l, m_i, n_i, α_i and $q_i(x)$ jsou stejné jako v předpokladu rozkladu reálného polynomu

$$\int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g' \qquad f = x \quad g' = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f' = 1 \quad g = (x^2+1)^{-1}$$

$$-1 \cdot (x^2+1)^{-2} \cdot 2x$$