Tvrzení Nutná podmínka konvergence: Konverguje-li řada $\sum a_n$, pak $\lim a_n = 0$.

Když $\sum a_n$ konverguje, pak $\lim s_n := S \in \mathbb{R}$ (zde $s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$)

Podle aritmetiky limit platí: $\lim a_n = \lim (s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = S - S = 0$

Tvrzení Harmonická řada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$ diverguje a má součet $+\infty$

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8} \dots$

Nechť (h_n) jsou částečné součty harm. řady a (s_n) jsou částečné součty předešlé řady $\sum a_n$.

Pak $1/n > a_n \ \forall n$, tedy i $h_n > s_n \ \forall n$. Protože $\lim s_n = +\infty$, tak i harmonická řada má součet $+\infty$ (věta o jednom policajtovi)

Věta Riemannova: Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada stejného typu jako předchozí, tedy:

1) $\lim a_n = 0$

2) $\sum a_{k_n} = +\infty$, kde a_{k_n} jsou kladné sčítance řady

3) $\sum a_{z_n} = -\infty$, kde a_{z_n} jsou záporné sčítance řady.

Pak $\forall S \in \mathbb{R}^* \ \exists$ bijekce $\pi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, že: $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = S$

$\hookrightarrow$ tedy správným zpřeházením sčítanců umím získat jakýkoli součet

Absolutně konvergentní řada je taková řada $\sum a_n$, pokud $\sum |a_n|$ konverguje.

Tvrzení Každá AK řada konverguje.

Nechť $\sum a_n$ je AK řada a (s_n) jsou její částečné součty - ukážeme, že to je Cauchyova posl.

Ta má totiž vlastní limitu. $\forall m, n: m \leq n$:

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n| \leq |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \dots + |a_n| = t_n - t_m = |t_n - t_m|,$$

kde (t_n) jsou částečné součty řady $\sum |a_n|$. (t_n) je ale Cauchyova, tedy i (s_n) je Cauchyova.

Věta Komutativita AK řad: Je-li $\sum a_n$ AK řada, pak pro každou bijekci $\pi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i řada $\sum a_{\pi(n)}$ je AK. Součty původní a zpřeházené řady se rovnají,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$$

Věta O geometrické řadě: pro $q \leq -1$ nemá geometrická řada součet. Pro $-1 < q < 1$ geo. řada konverguje a má součet $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$. Pro $q \geq 1$ má součet $= +\infty$

$\forall q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \forall n$ platí identita:

$$S_n := 1 + q + q^2 + \dots q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} + \frac{q^n}{q-1}.$$

Pro $q < -1$ podle AL máme $S_{2n-1} = +\infty$, $S_{2n} = -\infty$, tedy limita S_n neexistuje.

Pro $q = -1$ opět $S_{2n-1} = 1$, $S_{2n} = 0$, tedy součet řady opět neexistuje

Pro $-1 < q < 1$ je $\lim q^n = 0$, tedy řada má součet $\frac{1}{1-q}$.

Pro $q = 1$ je $S_n = n$, takže geo. řada má součet $+\infty$.

Pro $q > 1$ je $\lim q^n = +\infty$, tedy podle AL má řada (S_n) součet $+\infty$

$$q^m + q^{m+1} + q^{m+2} \dots = \frac{q^m}{1-q}$$

Prvek $L \in \mathbb{R}^*$ je limitní bod množiny $M \subset \mathbb{R}$, když $\forall \varepsilon : P(L, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset$

pro $f: A \to B$ a $C \subset A$ je $f[C] = \{f(x) \mid x \in C\} \subset B$

Nechť $A, L \in \mathbb{R}^*$, $M \subset \mathbb{R}$, A je limitním bodem množiny M a $f: M \to \mathbb{R}$ je funkce.

Pokud $\forall \varepsilon \exists \delta : f[P(A, \delta) \cap M] \subset U(L, \varepsilon)$,

píšeme $\lim_{x \to A} f(x) = L$ a říkáme, že funkce má v bodě A limitu L.

Tvrzení Jednoznačnost limity: Limita funkce je jednoznačná. Když $M \subset \mathbb{R}$, $f: M \to \mathbb{R}$, $K, L, L' \in \mathbb{R}^*$ a K je limitní bod množiny M, pak

$$\lim_{x \to K} f(x) = L \wedge \lim_{x \to K} f(x) = L' \Rightarrow L' = L$$

$\forall \varepsilon \exists \delta$ $f[P(K, \delta) \cap M] \in U(L, \varepsilon)$; $U(L', \varepsilon)$. Speciálně tedy

$U(L, \varepsilon) \cap U(L', \varepsilon) \neq \emptyset$, tedy $L = L'$!

Věta Heineho definice: Nechť $M \subset \mathbb{R}$, a, L jsou prvky $\mathbb{R}^*$, a je limitní bod množiny M a $f: M \to \mathbb{R}$. Pak:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \forall (a_n) \subset M \setminus \{a\} : \lim a_n = a \implies \lim f(a_n) = L.$$

Tedy L je limita funkce v a $\iff$ $\forall (a_n)$ v M, které mají lim a, ale nikdy se a nerovnají, funkční hodnoty $(f(a_n))$ mají limitu L.

$\Rightarrow$ Předpokládejme $\lim_{x \to a} f(x) = L$, že $(a_n) \subset M \setminus \{a\}$ má limitu a a je dáno ε.
Pak existuje δ, že $\forall x \in M \cap P(a, \delta)$ je $f(x) \in U(L, \varepsilon)$.
Pro takové δ $\exists n_0$ t.ž. $n \geq n_0 \implies a_n \in P(a, \delta) \cap M$. Tedy $n \geq n_0 \implies f(a_n) \in U(L, \varepsilon)$ a $f(a_n) \to L$.

$\Leftarrow$ ($! \Rightarrow !$) Předpokládejme, že $\lim_{x \to a} f(x) \neq L$, odvodíme, že pravá strana neplatí.
$\exists \varepsilon > 0$ t.ž. $\forall \delta > 0$ $\exists$ bod $b = b(\delta) \in M \cap P(a, \delta)$, že $f(b) \notin U(L, \varepsilon)$.
Položíme $\delta = \frac{1}{n}$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $\forall n$ vybereme bod $b_n := b(1/n) \in M \cap P(a, 1/n)$, že $f(b_n) \notin U(L, \varepsilon)$.
Posloupnost (b_n) leží v $M \setminus \{a\}$ a limitně se blíží a, ale posloupnost hodnot $(f(b_n))$ nelimití k L. Pravá strana ekvivalence tedy neplatí.

Exponenciála pro $\forall x \in \mathbb{R}$ položíme:

$$e^x = \exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

– je absolutně konvergentní $\forall x \in \mathbb{R} : n > |x|$

Tvrzení Exponenciální identita: Platí, že

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

Tvrzení Vlastnosti exponenciály: Platí, že

1) $\exp(0) = 1$
2) $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) > 0 \wedge \exp(-x) = 1/\exp(x)$
3) $\exp(x)$ je rostoucí funkce
4) $\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$
5) $\lim_{x \to \infty} \exp(x) = +\infty$
6) $\exp$ je bijekce $\mathbb{R} \to (0, +\infty)$

Eulerovo číslo $e := \exp(1) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \dots = 2{,}71828$ $e \notin \mathbb{Q}$

$$\log := \exp^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

Tvrzení Vlastnosti logaritmu:

1) $\log(1) = 0$ 2) $\forall x, y \in (0, +\infty): \log(xy) = \log(x) + \log(y)$ 3) $\log$ je rostoucí funkce.

4) $\lim_{x \to 0} \log(x) = -\infty$ 5) $\lim_{x \to +\infty} \log(x) = +\infty$ 6) $\log$ je bijekce $(0, +\infty) \to \mathbb{R}$.

Reálná mocnina $\forall a, b \in \mathbb{R}$ s $a > 0$:

$$a^b := \exp(b \log a)$$

speciálně pro $e^x := \exp(x \log(\exp(1))) = \exp(x \cdot 1) = \exp(x)$

Tvrzení Mocninné identity: Pro libovolná čísla $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ s $a, b > 0$ platí:

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x, \quad a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

1) $\exp(x \log(ab)) = \exp(x \cdot (\log a + \log b)) = \exp(x \log a) \cdot \exp(x \log b) = a^x \cdot b^x$

2) $\exp(x \log a) \cdot \exp(y \log a) = \exp(x \log a + y \log a) = \exp(\log a \cdot (x+y)) = a^{x+y}$

3) $\exp(y \log(\exp(x \log a))) = \exp(yx \log a) = a^{xy}$

Sinus a Cosinus: $\forall t \in \mathbb{R}$ definujeme:

$$\cos t := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin t := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{tedy } \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} \dots \qquad \sin t = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} \dots$$

Obě řady jsou opět absolutně konvergentní $\forall t \in \mathbb{R}$

Číslo $\pi = 3{,}14159\dots$ definujeme tak, že nejmenší kladný nulový bod (kořen) funkce $\cos t$ je $\pi/2$

Tvrzení Vlastnosti sinu a cosinu: Platí, že

1) Obě funkce jsou 2π-periodické 2) sinus na $\langle 0, \pi/2 \rangle$ roste z 0 do 1.

3) $\forall t \in \langle 0, \pi \rangle : \sin(t) = \sin(\pi - t)$, $\forall t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ $\sin t = -\sin(2\pi - t)$

4) $\forall t \in \langle 0, 2\pi \rangle : \cos(t) = \sin(t + \pi/2)$ 5) $\forall t \in \mathbb{R}: \sin^2 t + \cos^2 t = 1$

6) $\forall s, t \in \mathbb{R}$ platí: $\sin(s \pm t) = \sin s \cdot \cos t \pm \cos s \cdot \sin t$, $\cos(s \pm t) = \cos s \cdot \cos t \mp \sin s \cdot \sin t$