Rozšířená reálná osa: $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Pravidla pro práci s nekonečny:

$$A \in \mathbb{R}^* \Rightarrow A + (\pm\infty) = \pm\infty + A = \pm\infty$$

$$A \in (0, +\infty) \cup \{+\infty\} \Rightarrow A \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \cdot A = \pm\infty$$

$$A \in (-\infty, 0) \cup \{-\infty\} \Rightarrow A \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \cdot A = \mp\infty$$

!

$$a \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{a}{\pm\infty} = 0$$

$-(\pm\infty) = \mp\infty$, $-\infty < a < +\infty$, $-\infty < +\infty$

Nedefinované operace: $\frac{A}{0}$, $(\pm\infty) + (\pm\infty)$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Intervaly

$(a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ např.

ε-okolí bodu b definujeme:

$$U(b, \varepsilon) := (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$$

Prstencové ε-okolí bodu b:

$$P(b, \varepsilon) := (b - \varepsilon, b) \cup (b, b + \varepsilon)$$

tudíž $P(b, \varepsilon) = U(b, \varepsilon) \setminus \{b\}$

ε-okolí nekonečna:

$$U(-\infty, \varepsilon) := (-\infty, -1/\varepsilon), \quad U(+\infty, \varepsilon) := (1/\varepsilon, +\infty), \quad P(\pm\infty, \varepsilon) := U(\pm\infty, \varepsilon)$$

Důležitou vlastností je, že pokud $V, V' \in \{U, P\}$, pak

$$A, B \in \mathbb{R}^*, A < B \Rightarrow \exists \varepsilon : V(A, \varepsilon) < V'(B, \varepsilon),$$ tedy $a < b \ \forall a \in V(A, \varepsilon) \ \forall b \in V'(B, \varepsilon)$

Limita posloupnosti: Nechť (a_n) je reálná posl. a $L \in \mathbb{R}^*$.

Pokud $\forall \varepsilon \ \exists n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U(L, \varepsilon)$, $\Rightarrow \lim a_n = L$

Pro každý index $n \geq n_0$ existuje ε, že $|a_n - a| < \varepsilon$

$\lim a_n$

$L \in \mathbb{R}$ -> vlastní limita - konverguje

$L = \pm\infty$ -> nevlastní limita - diverguje

Pro $\lim = -\infty$ $\forall n_0 \ \exists c : n \geq n_0 \Rightarrow a_n < c$

-> jakkoliv záporné

-> podobně s $+\infty$

Tvrzení o jednoznačnosti limity: Limita posloupnosti je jednoznačná: $\lim a_n = K$, $\lim a_n = L \Rightarrow L = K$

Nechť $\lim a_n = K$, $\lim a_n = L$, ε lib. Pak podle definice existuje n_0 : $n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U(K,\varepsilon) \cap U(L,\varepsilon)$

Tedy $\forall \varepsilon: U(K,\varepsilon) \cap U(L,\varepsilon) \neq \emptyset$. Pak ale $L = K$

↳ Protože pokud $L \neq K$, pak je průnik $\emptyset$.

Ukážeme, že $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Pro daný ε a $\forall n \geq n_0 := 1 + \lceil 1/\varepsilon \rceil$: $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{1+\lceil 1/\varepsilon \rceil} < \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon \leadsto 1/n \in U(0,\varepsilon)$

$> \frac{1}{\varepsilon}$

↳ tedy jsme explicitně našli optimální hodnotu n_0.

Posloupnost b_n je podposloupnost posloupnosti a_n, pokud existuje taková posl. přir. čísel $\underbrace{m_1 < m_2 < \dots}$, že $\forall n: b_n = a_{m_n}$

Zavedeme značení $(b_n) \preceq (a_n)$ → vybírám jen nějaké členy, ale jejich indexy stále rostou.

Taková relace je reflexivní a tranzitivní. Může být $(a_n) \preceq (b_n)$, $(b_n) \preceq (a_n)$, přitom $(a_n) \neq (b_n)$

Tvrzení $\preceq$ zachovává limity. Nechť $(b_n) \preceq (a_n)$ a $\lim a_n = L \in \mathbb{R}^*$. Pak i $\lim b_n = L$.

platí, že posloupnost (m_n) → $b_n = a_{m_n}$ splňuje $m_n \geq n$ $\forall n$, tedy je zachování limit.

Tvrzení o podposloupnostech. Nechť (a_n) je reálná posloupnost a $A \in \mathbb{R}^*$. Platí následující

1) $\exists (b_n) \preceq (a_n)$ a (b_n) má limitu

2) (a_n) nemá limitu $\Leftrightarrow$ (a_n) má dvě podposloupnosti s různými limitami

3) Není pravda, že $\lim a_n = A \Leftrightarrow \exists (b_n) \preceq (a_n)$, kde $\lim (b_n) \neq A$

$(a_n) = ((-1)^n) = (-1, 1, -1, 1, \dots)$

↳ což má dvě podpos!

$(-1, -1, -1, \dots)$ a $(1, 1, \dots, 1)$

Tvrzení platí, že: $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Vždy $n^{1/n} \geq 1$. Kdyby $n^{1/n} \not\to 1$, existovalo by číslo $c > 0$ a posloupnost $2 \leq n_1 < n_2 \dots$, že $\forall i: n_i^{1/n_i} > 1 + c$. Podle bin. věty

$n_i > (1+c)^{n_i} =$

$\sum_{j=0}^{n_i} \binom{n_i}{j} c^j = 1 + \binom{n_i}{1} c + \binom{n_i}{2} c^2 + \dots \geq \frac{n_i(n_i-1)}{2} \cdot c^2$

tedy $\forall i$ $n_i > \frac{n_i(n_i-1)}{2} \cdot c^2 \leadsto 1 + \frac{2}{c^2} > n_i$ $\boxed{/ \overset{\text{\large ↯}}{}}$ → posloupnost není shora omezená

Monotonie posloupnosti (a_n):

1) Neklesající: $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n$ (od n_0 $\forall n \geq n_0$)

2) Nerostoucí: $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n$ (od n_0 $\forall n \geq n_0$)

3) Monotónní: Je-li neklesající nebo nerostoucí (od n_0)

+ Ostré nerovnost definuje rostoucí / klesající posl.

Omezenost Posl. je shora omezená, pokud $\exists c \forall n: a_n < c$, jinak je shora neomezená. (Funguje i obráceně)

Věta O monotónní posloupnosti: Reálná posl. (a_n), která je od n_0 monotónní, má limitu.

Je-li (a_n) neklesající od n_0, pak:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \sup(\{a_n \mid n \geq n_0\}) & \ldots (a_n) \text{ je shora omezená a} \\ +\infty & \ldots (a_n) \text{ je shora neomezená} \end{cases}$$

Je-li (a_n) nerostoucí od $n \geq n_0$, pak

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \inf(\{a_n \mid n \geq n_0\}) & \ldots (a_n) \text{ je zdola omezená a} \\ -\infty & \ldots (a_n) \text{ je zdola neomezená} \end{cases}$$

Symetrický důkaz -> tedy dokážeme jen 1/2.

Pokud je shora neomezená, pak pro daná c $\exists m: a_m > \max(c, a_1, a_2, \ldots a_{n_0})$,

tedy $a_m > c$; $m > n_0$, tudíž $\forall n \geq m$:

$$a_n \geq a_{n-1} \geq \ldots \geq a_m > c \rightsquigarrow a_n > c \Rightarrow a_n \to +\infty$$

Pro (a_n) shora omezenou položme $s := \sup(\{a_n \mid n \geq n_0\})$. Buď dáno $\varepsilon > 0$.

Podle def. sup. $\exists m \geq n_0$, že $s - \varepsilon < a_m \leq s$. Tedy $\forall n \geq m$:

$$s - \varepsilon < a_m \leq \ldots \leq a_{n-1} \leq a_n \leq s \rightsquigarrow s - \varepsilon < a_n \leq s \Rightarrow a_n \to s$$

Tvrzení Existence monotónní podposl: Každá posloupnost $\mathbb{R}$ má monotónní podposl.

Pro danou posloupnost (a_n) určíme množinu $M := \{n \mid \forall m: n \leq m \Rightarrow a_n \geq a_m\}$

Když je nekonečná $M = \{m_1 < m_2 < \ldots\}$, máme nerostoucí podposloupnost (a_{m_n}).

Když je konečná, vezmu $m_1 > \max(M)$. Pak jistě $m_1 \notin M$, tedy $\exists m_2 > m_1$, že $a_{m_1} < a_{m_2}$.

Protože $m_2 \notin M$, $\exists m_3 > m_2$, že $a_{m_2} < a_{m_3}$ ... Máme neklesající, ostře rostoucí, podposloupnost.

<=> Posloupnost $\mathbb{R}$ má vždy podposloupnost, co má limitu

Věta Bolzano-Weierstrassova: Omezená posl. $\mathbb{R}$ má vždy konvergentní podposl.

Nechť (a_n) je omezená posloupnost a $(b_n) \preceq (a_n)$ je její monotónní podposloupnost zaručená podle tvrzení o podposloupnosti posl. $\mathbb{R}$ čísel.

Patrně je (b_n) omezená a tudíž podle věty o monotónní posl. má limitu. $\boxtimes$

Cauchy ovlnost: posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je Cauchyova, pokud:

$$\forall \varepsilon\, \exists n_0 : m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon, \text{ tj. } a_m \in U(a_n, \varepsilon)$$

$\Rightarrow$ Každá Cauchyova posloupnost je omezená.

Věta Cauchyova podmínka: Posloupnost reálných čísel (a_n) je konvergentní $\Leftrightarrow$ (a_n) je Cauchyova.

$\Rightarrow$ Nechť $\lim a_n = a$ a je dáno ε. Pak existuje n_0, že $n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon/2$,

tedy $m, n \geq n_0 \Rightarrow \underbrace{|a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a|}_{\text{trojúhelníková nerovnost}} < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

$\Leftarrow$ Nechť (a_n) je Cauchyova posl. – je tedy omezená, proto má podle Bolzano-Weierstrasse konvergentní podposl. (a_{m_n}) s limitou a. Pro dané ε tak máme n_0, že $n \geq n_0 \Rightarrow |a_{m_n} - a| < \varepsilon/2$ a že $m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon/2$, vždy $m_n \geq n$, takže

$n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| \leq |a_n - a_{m_n}| + |a_{m_n} - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, tedy $a_n \to a$.

$\to$ taková podposloupnost omezená existuje podle tvrzení výše