Pro dělení $[a,b]$ $P = (a_0, a_1, \dots, a_k)$ označme:

$$I_i := [a_{i-1}, a_i] \text{ a } |I_i| = a_i - a_{i-1}.$$ Pro $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ součty:

$$s(P,f) := \sum_{i=1}^{k} |I_i| \cdot \inf(f[I_i]) \quad \text{a} \quad S(P,f) := \sum_{i=1}^{k} |I_i| \cdot \sup(f[I_i])$$

Tvrzení Monotonie d. a h. součtů. Nechť $P \subset Q$ jsou dělení int. $[a,b]$ a nechť $f: [a,b] \to \mathbb{R}$.

Pak $s(P,f) \leq s(Q,f)$ a $S(P,f) \geq S(Q,f)$

Tvrzení Definice (R) $\int$: Nechť $a < b \in \mathbb{R}$ a $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Pak:

$$f \in R(a,b) \iff \exists c \, \forall \varepsilon \, \exists P \, \forall \bar{t}: |c - R(P, \bar{t}, f)| < \varepsilon$$

$$\underline{\int_a^b} f := \sup(\{s(P,f) \mid P \in D\}) \in \mathbb{R}^*$$

$$\overline{\int_a^b} f := \inf(\{S(P,f) \mid P \in D\}) \in \mathbb{R}^*$$

kde $D := \{ P \mid P \text{ je dělení množiny } [a,b] \}$

Tvrzení $\underline{\int} \leq \overline{\int}$: Nechť $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ je funkce. Pak pro $\forall P, Q \in D(a,b)$ je:

$$s(P,f) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} \leq S(Q,f)$$

$R := P \cup Q$. Pak $P, Q \subset R$, tedy: $s(P,f) \leq s(R,f) \leq S(R,f) \leq S(Q,f)$

a $s(P,f) \leq S(Q,f)$.

Nyní pro lin uspoř. platí, pokud $A \leq B$, $\sup(A) \leq \inf(B)$.

Každé $a \in A$ je tohoto dolní mez B, takže $A \leq \{\inf(B)\}$, tedy $\inf(B)$ je horní mez

množiny A. $\sup(A) \leq \inf(B)$

Tvrzení Riemann = Darboux: Funkce $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ je:

$$f \in R(a,b) \iff \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Potom } (R) \int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$$

Henstock - Kurzweilův integrál Funkce $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ je integrovatelná podle Henstocka a Kurzweila, symbolicky psáno $f \in HK(a,b)$, pokud $\exists L \in \mathbb{R}$, že $\forall \varepsilon\ \exists \delta_\varepsilon$, kde δ_ε je kalibr na $[a,b]$, že pro $\forall P$ int. $[a,b]$ a test. body $\overline{t}$ z P platí, že:

$$P \text{ a } \overline{t} \text{ jsou } \delta_\varepsilon\text{-jemné} \Rightarrow |R(P,\overline{t},f)| < \varepsilon.$$

Pak takté píšeme:

$$(HK)\int_a^b f = L \quad \text{nebo} \quad (HK)\int_a^b f(x)\,dx = L.$$

Z definice plyne

$$R(a,b) \subset HK(a,b)$$

Věta HK. $\int$ a N. $\int$: Nechť $a < b$ jsou v $\mathbb{R}$, funkce $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá a $F' = f$ na (a,b).
Pak $f \in HK(a,b)$ a

$$(HK)\int_a^b f = F(b) - F(a) = (N)\int_a^b f$$

Věta Per partes pro R. $\int$: Nechť $a < b$ jsou v $\mathbb{R}$, funkce $F, G, f, g: (a,b) \to \mathbb{R}$ na (a,b) splňující, že $F' = f$, $G' = g$

a $Fg, fG \in R(a,b)$.

$$\int_a^b Fg = [FG]_a^b - \int_a^b fG.$$

Věta R. $\int$ substitucí: Nechť $G: [a,b] \to \mathbb{R}$ má na $[a,b]$ spojitou derivaci G' a $f: G[[a,b]] \to \mathbb{R}$ je spojitá. Pak platí:

$$\int_{G(a)}^{G(b)} f = \int_a^b f(G)G'$$

Věta Preissam a Uhrova: Nechť je $g \in R(a,b)$, pro $x \in [a,b]$ nechť $G(x) := \int_a^x g$ a $f: G[[a,b]] \to \mathbb{R}$ je omezená. Pak $f \in R(G[[a,b]]) \Leftrightarrow f(G)g \in R(a,b)$.
V pozitivním případě platí:

$$\int_{G(a)}^{G(b)} f = \int_a^b f(G)g$$

Délka grafu: Řekneme, že $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ má rektifikovatelný graf, je-li supremum

$$\ell(f) := \sup\left(\left\{\sum_{i=1}^{k}\left|(a_{i-1}, f(a_{i-1}))(a_i, f(a_i))\right| \mid (a_0, \dots, a_k) \in D(a,b)\right\}\right) \text{ konečné.}$$

Věta **Délka grafu:** Nechť $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ spojitá a má vlastní $f' \in R(a,b)$ na (a,b).

Funkce je pak rektifikovatelný graf s délkou $\ell(f) = \int_a^b \sqrt{1+(f')^2}$

Plocha mezi grafy: Nechť $f,g \in R(a,b)$ a $f \le g$ na $[a,b]$. Pak

$$\text{plocha}\left(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[a,b] \wedge f(x)\le y\le g(x)\}\right) := \int_a^b (g-f)$$

Pro nezápornou $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ def. rotační těleso vzniklé rotací G_f kolem osy x jako:

$$V(a,b,f) := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x\in[a,b] \wedge y^2+z^2 \le f(x)^2\}$$

Objem rotačního tělesa: Nechť funkce $f \in R(a,b)$ a je nezáporná. Pak objem

$$V(a,b,f) := \pi\int_a^b f^2$$

Tvrzení **$\sum f(n)$ pro monotónní fce:** Nechť $a<b \in \mathbb{N}$ a $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ je monotónní. Pak:

$$\sum_{a<n\le b} f(n) = (R)\int_a^b f + \theta\left(f(b)-f(a)\right), \text{ pro nějaké číslo } \theta\in[0,1]$$

Důsledek **Integrální kritérium:** Nechť $m\in\mathbb{N}$, $f:[m,+\infty)\to\mathbb{R}$ je nezáporná a nerostoucí.

Potom řada $\sum_{n=m}^{\infty} f(n)$ konverguje $\iff \lim_{n\to\infty}\int_m^n f < +\infty$

Věta Abelova sumace: Nechť $(a_n) \subset \mathbb{R}$, $a < b \in \mathbb{R}^+$, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ je s vlastní f' na (a,b) $\in \mathcal{R}(a,b)$.

Pak platí:

$$\sum_{a<n\le b} a_n f(n) = \left[A(x) f(x)\right]_a^b - \overbrace{\int_a^b A(x) f'(x)}^{T}$$

Formule je aditivní na $[a,b)$, tedy stačí uvážit jen případ $m \le a < b \le m+1$ pro $m \in \mathbb{N}_0$.

Podle Lemma 2:

$$T = \int_a^b A(m) f'(x)\,dx = A(m)\left[f(x)\right]_a^b .$$

$$A(x) := \sum_{n \le x} a_n$$

Po dosazení vpravo zbyde $(A(b)-A(m))f(b)$. Pro $b < m+1$ to je 0, v souladu s levou stranou.

Pro $b = m+1$ to je $a_{m+1} f(m+1)$, opět v souladu s levou stranou.