Tvrzení **Podobné Riemannovy součty:** Nechť $a, b \in \mathbb{R}: a < b$, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ spojitá. Potom $\forall \varepsilon\ \exists \delta$: pokud P a Q jsou dělení intervalu $[a,b]$ s normami $\Delta(P), \Delta(Q) < \delta$ a $\bar{t}, \bar{u}$ jsou lib. testovací body z, po řadě, P a Q, pak $|R(P, \bar{t}, f) - R(Q, \bar{u}, f)| < \varepsilon$.

Riemannův součet definujeme:

$$R(P, \bar{t}, f) := \sum_{i=1}^{k} (a_i - a_{i-1}) \cdot f(t_i),$$ kde P je dělení intervalu $\| (a_0, a_1, \ldots a_k): a = a_0 < a_1 < a_2 \ldots < a_n = b$ a $\bar{t} = (t_1, \ldots t_k)$ s $t_i \in [a_{i-1}, a_i]$ jsou lib. test. body.

Limity Riemannových součtů: Nechť je $a, b, L \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, která nemusí být spojitá. Pokud pro jakékoli dvě posl. (P_n) dělení P_n intervalu $[a,b]$ a $(\overline{t(n)})$ testovacích bodů $\overline{t(n)}$ z P_n platí, že:

$$\lim \Delta(P_n) = 0 \Rightarrow \lim R(P_n, \overline{t(n)}, f) = L,$$

napíšeme $\lim\limits_{\Delta(P) \to 0} R(P, \bar{t}, f) = L$ a řekneme, že Riemannovy součty funkce f mají limitu L.

Důsledek **$\exists$ limity R. součtů:** $\forall f [a,b] \to \mathbb{R}: a, b \in \mathbb{R}, a < b$, spojitou $\exists$ konečná limita

$$\lim_{\Delta(P) \to 0} R(P, \bar{t}, f) \in \mathbb{R}.$$

Nechť je $\lim\limits_{\Delta(P)\to 0} = 0$. Pak $R(P_n, t(n), f)$ má limitu $L \in \mathbb{R}$. Pokud tak budu mít jinou posloupnost dělení tohoto intervalu, zase s $\lim\limits_{\Delta(Q)\to 0} = 0$, tak platí, že limita rozdílu těchto dvou Riemannových součtů $= 0$, tedy že i další Riemannův součet má stejnou limitu.

Důsledek **Riemann = Newton:** Nechť $a < b \in \mathbb{R}$, $f [a,b] \to \mathbb{R}$ je spoj. funkce a $F [a,b] \to \mathbb{R}$ prim. funkce k f. Pak:

$$\lim_{\Delta P \to 0} R(P, \bar{t}, f) = F(b) - F(a).$$

Plocha pod grafem: Nechť $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, pro $a<b \in \mathbb{R}$, spojitá a $D_f \subset \mathbb{R}^2$ je oblast pod jejím grafem G_f. Plocha $A_f \subset \mathbb{R}$ oblasti D_f lze definovat:

1) (I. Newton): $A_f := F(b) - F(a)$ pro lib. prim. $F:[a,b] \to \mathbb{R}$ k f.

2) (Riemann): $A_f := \lim_{\Delta(P) \to 0} R(P, \bar{t}, f)$

Newtonův integrál Nechť $a,b \in \mathbb{R}: a<b$ a $F, f: (a,b) \to \mathbb{R}$ jsou t.ž. F je prim. k f.

Newtonův integrál funkce f přes interval (a,b) definujeme jako:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) := \lim_{x \to b} F(x) - \lim_{x \to a} F(x),$$ jestliže poslední dvě limity existují a jsou konečné.

Pak také plocha $A_f := \int_a^b f$

Funkce je Newtonovsky integrovatelná „$f \in N(a,b)$" na (a,b).

Tvrzení Monotonie (N) $\int$: Pokud jsou funkce $f, g \in N(a,b)$ a $f \leq g$ na (a,b),

pak:

$$(N) \int_a^b f \leq (N) \int_a^b g$$

Nechť F a G jsou na (a,b) prim. k f a g. Vezmu lib. $c<d$ v (a,b) a pomocí Lagrangeovy věty o střední hodnotě na $F-G$ a int. $[c,d]$:

Pro $e \in (c,d)$ je:

$$\big(F(d) - G(d)\big) - \big(F(c) - G(c)\big) = (F-G)'(e) \cdot (d-c)$$

$$= \big(F'(e) - G'(e)\big) \cdot (d-c)$$

$$= \big(f(e) - g(e)\big) \cdot (d-c) \leq 0$$

Proto $F(d) - F(c) \leq G(d) - G(c)$.

Tato vlastnost se zachová na limitních přechodech $c \to a$ and $d \to b$, dostáváme uvedenou nerovnost.

Tvrzení **Asymptotika (N)** $\int$: Nechť $f, g \in N(a,b)$, nechť $g > 0$ na (a,b), nechť $f(x) = o(g(x))$ $(x \to a)$ a nechť $\lim_{x \to a} (N) \int_x^b g = +\infty$. Pak:

$$(N) \int_x^b f = o\left((N) \int_x^b g\right) \quad (x \to a).$$

Věta **L'Hospitalovo pravidlo, podmínka 2:** Nechť $A \in \mathbb{R}$. Nechť pro nějaké δ mají funkce $f, g : P^+(A, \delta) \to \mathbb{R}$ na $P^+(A,\delta)$ konečné derivace, $g' \neq 0$ na $P^+(A,\delta)$ a nechť $\lim_{x \to A} g(x) = \pm\infty$. Pak:

$$\lim_{x \to A} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to A} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$, pokud poslední limita existuje.

Platí stejně pro levé okolí.

Darbouxova vlastnost: Pokud $a < b$ v I a c: $f(a) < c < f(b)$, pak $f(d) = c$ pro nějaké $d \in (a,b)$.

Věta: **Derivace jsou Darbouxovy:** Každá funkce $f : I \to \mathbb{R}$ def. na int. $I \subset \mathbb{R}$, která má prim. funkci, má Darbouxovu vlastnost. → Nabývání mezihodnot.

Předpokládáme $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, kde $a < b \in \mathbb{R}$, má prim. $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ a $f(a) < c < f(b)$.

Uvažme $G(x) := F(x) - cx : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Ta má na $[a,b]$ konečnou derivaci $G'(x) = F'(x) - c = f(x) - c$. Speciálně je G spojitá.

Pak musí G na $[a,b]$ nabýt minima v $d \in [a,b]$.

Z $G'(a) = f(a) - c < 0$ a $G'(b) = f(b) - c > 0$. Pak $d \in (a,b)$.

Pak ale $f(d) - c = G'(d) = 0$, takže $f(d) = c$

Věta se většinou použije obráceně → pokud nemá funkce Darbouxovu, nemá prim. funkci.

Věta Linearita $\int$: Nechť $f, g: I \to \mathbb{R}$ jsou funkce def. na netriv. int. $I \subset \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Pak:

$$\int(af + bg) = a\int(f) + b\int(g).$$

Tedy pokud G prim. k g, F prim. k f, pak $aF + bG$ je prim. k $af + bg$

Věta Integrace Per Partes: Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je netriv. int. a $f, g, F, G: I \to \mathbb{R}$ jsou funkce, kdy F prim. k f, G prim. k g.

Pak:

$$\int fG = FG - \int Fg$$

$(FG = \int fG + \int Fg)$

$\to$ pokud H prim. k Fg, pak $FG - H$ je prim. k fG.

$(FG - H)' = F'G + FG' - H' = fG + Fg - Fg = fG$

Věta Integrace substitucí: Pokud jsou $I, J \subset \mathbb{R}$ netriv. int. $g: I \to J$, $f: J \to \mathbb{R}$ a g má na I vlastní g', pak platí následující:

1) Pokud $F = \int f$ na J, pak:

$$F(g) = \int f(g) \cdot g' \text{ na } I$$

2) Pokud je g surjekce a $g' \neq 0$ na I, pak platí implikace

$$G = \int f(g) \cdot g' \text{ na } I \implies G(g^{-1}) = \int f \text{ na } I.$$