Riemannův integrál: Řekneme, že $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ je riemannovsky integrovatelná, napíšeme $f \in \mathcal{R}(a,b)$, pokud $\exists L \in \mathbb{R}: \forall \varepsilon \exists \delta$ t.ž. jakékoliv dělení P int. $[a,b]$ a jakékoli test. body $\bar{t}$ z P platí:

$$\Delta P < \delta \Rightarrow |R(P,\bar{t},f) - L| < \varepsilon.$$

Pak také píšeme $(R)\int_a^b f = L$ nebo $(R)\int_a^b f(x)\,dx = L$

Tvrzení *Ekvivalentní definice r. integrovatelnosti:*

Nechť $f:[a,b] \to \mathbb{R}$. Následující tři jsou logicky ekvivalentní:

1) $f \in \mathcal{R}(a,b)$

2) (Cauchyovská podmínka) $\forall \varepsilon \exists \delta: \forall$ dělení P a Q na $[a,b]$ s test. body $\bar{t}$ a $\bar{u}$ platí, že:

$$\Delta P, \Delta Q < \delta \Rightarrow |R(P,\bar{t},f)| - |R(Q,\bar{u},f)| < \varepsilon$$

3) (Heineho definice) $\forall (P_n)$ dělení $[a,b]$ s test. body $\bar{t}(n)$ platí, že pokud $\lim \Delta(P_n) = 0$, pak posl. $(R(P_n, \bar{t}(n), f))$ konverguje.

Pokud platí 1, pak $\forall$ posl. riemannovských součtů v 3 s normami jdoucími k nule má $\lim R(P_n, t(n), f) = \int_a^b f$.

Tvrzení *Změny hodnot funkce: Předpokládejme, že $f \in \mathcal{R}(a,b)$ a že $g:[a,b] \to \mathbb{R}$ se od f liší pouze v konečně mnoha hodnotách. Potom $g \in \mathcal{R}(a,b)$ a*

$$\int_a^b g = \int_a^b f$$

$\int_a^b f$ pro f def. na (a,b). Nechť $a < b \in \mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$, pro $I = (a,b)$, nebo $(a,b]$ nebo $[a,b)$.

Funkci f rozšíříme na $[a,b] \to \mathbb{R}$ libovolnými hodnotami a and b a definujeme: $\int_a^b f := \int_a^b f_0$. Pokud pravá strana existuje.

Tvrzení *O restrikcích: Jestliže $a < b < c \in \mathbb{R}$ a $f:[a,c] \to \mathbb{R}$, pak*

$$f \in \mathcal{R}(a,c) \Leftrightarrow f \in \mathcal{R}(a,b) \wedge f \in \mathcal{R}(b,c).$$

Pro kladný případ: $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$

Plocha pod grafem A_f: Pokud $f \in \mathcal{R}(a,b)$, pak A_f oblasti D_f pod G_f funkce $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ definujeme:

$$A_f := \int_a^b f(x)\,dx.$$

Tvrzení *Neomezené funkce jsou špatné:* Pokud je $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ neomezená, pak $f \notin \mathcal{R}(a,b)$.

Předpokládáme, že f je neomezená a ukážeme, že $\forall n\ \exists$ dělení P int. $[a,b]$ s $\overline{t}$ test. body, že:

$$\Delta(P) < 1/n \quad \text{a} \quad |R(P,\overline{t},f)| > n$$

To je v rozporu s Cauchyho podmínkou pro riemannovskou integrovatelnost.

Z neomezenosti f a kompaktnosti $[a,b]$ vyplývá, že $\exists$ konvergentní posl. $(b_n) \subset [a,b]$ s $\lim(b_n) = \alpha \in [a,b]$ a s $|\lim f(b_n)| = +\infty$. Nechť je dáno $n \in \mathbb{N}$.

Jako P vezmeme lib. dělení $(a_0, a_1, \dots, a_k)$ int. $[a,b]$ s $\Delta(P) < 1/n$, ale takové, že existuje jediný index $j \in \{1 \dots k\}$, že $\alpha \in [a_{j-1}, a_j]$. Pak vybereme lib. test. body t_i z $[a_{i-1}, a_i]\ \forall i \neq j$ a utvoříme neúplný Riemannovský součet

$$s := \sum_{i\neq j}^{k} (a_i - a_{i-1}) f(t_i)$$

Nyní vybereme zbývající test. bod $t_j \in [a_{j-1}, a_j]$ tak, aby $|(a_j - a_{j-1}) f(t_j)| > |s| + n$

což lze, protože $b_n \in [a_{j-1}, a_j]$ pro každé dostatečně velké n.

Pak definujeme $\overline{t}$ jako sestávající ze všech těchto test. bodů a pomocí Δ-nerovnosti $|u+v| \geq |u| - |v|$

dostaneme $|R(P,\overline{t},f)| \geq |(a_j - a_{j-1}) f(t_j)| - |s| \geq n$

Tvrzení *Příliš nespojité funkce:* Je-li funkce $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ nespojitá v každém bodě nějakého $[c,d] \subset [a,b]$, $c<d$, pak $f \notin \mathcal{R}(a,b)$

Řídká množina: Množina $M \subset [a,b]$ je řídká, pokud $\forall U(c,\varepsilon)$ s $c \in [a,b]$ $\exists U(d,\delta) \subset U(c,\varepsilon) \cap [a,b]$: $U(d,\delta) \cap M = \emptyset$

Věta Baireova: $a < b \in \mathbb{R}$ a $[a,b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, pak některá množina M_n není řídká.

Předpokládejme, že každá M_n je řídká a odvodíme spor.

Protože M_1 je řídká, $\exists [a_1,b_1] \subset [a,b] : a_1 < b_1$ a $[a_1,b_1] \cap M_1 = \emptyset$.

Protože M_2 je řídká $\exists [a_2,b_2] \subset [a_1,b_1] : a_2 < b_2$ a $[a_2,b_2] \cap M_2 = \emptyset$

$\vdots$

$$[a,b] \supset [a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \dots, \text{ že } \forall n \quad a_n < b_n \text{ a } [a_n,b_n] \cap M_n = \emptyset.$$

Nechť $\alpha := \lim a_n \in [a,b]$. Tato limita existuje a leží v $[a,b]$, protože posl. (a_n) je neklesající a zdola omezená číslem a, shora číslem b. Dokonce $a_n < b_m \ \forall n,m$, takže $\alpha \in [a_n,b_n] \ \forall n$. Pak ale $\alpha \notin M_n \ \forall n$, což je spor s $\alpha \in [a,b]$.

Míra množiny: Množina $M \subset \mathbb{R}$ má míru 0, pokud $\forall \varepsilon \ \exists [a_n,b_n] \ n \in \mathbb{N}$ a $a_n < b_n$, že:

$$M \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n,b_n] \quad a \quad \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon$$

$$DC(f) := \{ x \in M \mid f \text{ je nespojitá v } x \}$$

Věta Lebesguova: $\forall f : [a,b] \to \mathbb{R}$:

$$f \in R(a,b) \iff f \text{ je omezená a } DC(f) \text{ má míru } 0.$$

Důsledek: Dobré operace pro r. integrov.: Platí následující:

1) $f, g \in R(a,b) \Rightarrow cf + dg \in R(a,b)$

2) $f, g \in R(a,b) \Rightarrow f \cdot g \in R(a,b)$

3) Pokud $g : [a,b] \to M \subset \mathbb{R}$, $f : M \to \mathbb{R}$, $g \in R(a,b)$ a f je spojitá a omezená, pak $f(g) \in R(a,b)$

4) Pokud $g : [c,d] \to [a,b]$ a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, g je spojitá a $f \in R(a,b)$, pak $f(g) \in R(a,b)$

Věta Spojité funkce jsou r. integrovatelné: Je-li $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ spojitá, pak $f \in R(a,b)$.

Věta Monotónní funkce jsou r. integrovatelné: Pokud je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotónní, pak $f \in (a,b)$.

Věta 2vana2: Nechť $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, kde $a<b\in\mathbb{R}$, má prim. $F:(a,b)\to\mathbb{R}$ a nechť $f\in R(a,b)$. Pak existují konečné $F(a):=\lim_{x\to a}F(x)$ a $F(b):=\lim_{x\to b}F(x)$ a:

$$(R)\int_a^b f = F(b)-F(a) = (N)\int_a^b f.$$

Lipschitzovsky spojitá funkce je taková funkce $f:M\to\mathbb{R}$, $M\subset\mathbb{R}$, pokud $\exists c>0$:

$$\forall x,y\in M: |f(x)-f(y)|\le C|x-y|$$

Věta 2vana1: Nechť $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ je v $R(a,b)$. Potom $\forall x\in(a,b]$ je $f\in R(a,x)$, a $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ daná jako $F(x):=\int_a^x f$, je lipschitzovsky spojitá. Navíc pro ni platí, že $F'(x)=f(x)$ v každém bodě spojitosti $x\in[a,b]$ funkce f.