Věta Taylorův polynom: Nechť $n \in \mathbb{N}_0$ a funkce $f: U(b,\delta) \to \mathbb{R}$ má vlastní $f^{(n)}(b) \in \mathbb{R}$.

Pro $n=0$ se tím rozumí spojitost f v b. Pak $\exists!$ polynom

$$p(x) := \sum_{j=0}^{n} a_j (x-b)^j, \quad a_j \in \mathbb{R}, \text{ že } \lim_{x\to b} \frac{f(x)-p(x)}{(x-b)^n} = 0.$$

Značíme $T_n^{f,b}(x)$, $a_j := f^{(j)}(b)/j!$ $\qquad T_n^{f,b}(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(b)}{j!}\cdot(x-b)^j$

$$T_n^{f,b}(x) = f(b) + f'(b)\cdot(x-b) + \frac{f''(b)}{2}\cdot(x-b)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(b)}{n!}\cdot(x-b)^n$$

hořejší lin. aproximace je $T_1^{f,b}(x)$. Dále $T_0^{f,b}(x) = f(b)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}: \left(T_n^{f,b}(x)\right)' = T_{n-1}^{f',b}(x)$$

Lemma O nulovém polynomu: $\forall b \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}_0$ a $\forall p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ s $a_j \in \mathbb{R}$ platí:

$$\lim_{x\to b} \frac{p(x)}{(x-b)^n} = 0 \Rightarrow \forall j = 0,1,\dots,n: a_j = 0$$

Indukcí podle n:

Pro $n=0$: $\frac{a_0}{1} \to 0$ dává $a_0 = 0$ ✓

$n > 0$:

$p(b) = \lim_{x\to b} p(x) = 0$, tedy b je kořenem $p(x)$ a $p(x) = (x-b)\cdot q(x)$,

kde $q(x)$ je reálný polynom stupně nejvýše $n-1$.

Z $0 = \lim_{x\to b} \frac{p(x)}{(x-b)^n} = \lim_{x\to b} \frac{q(x)}{(x-b)^{n-1}}$ indukcí plyne, že $q(x)$ je nulový polynom. Tedy i $p(x)$.

Důkaz Taylorova polynomu:

Předpoklad pro $f^{(n)}(b)$ znamená, že $\forall j = \{0,1,\dots,n-1\}\ \exists f^{(j)}: U(b,\delta) \to \mathbb{R}$.

Nejprve dokážeme, že pro $p(x) = T_n^{f,b}(x)$ platí limita 0. Pro $n=0$ to plyne ze spojitosti v b.

Pro $n=1$ se podle AL:

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x) - \overbrace{(f(b) + f'(b)\cdot(x-b))}^{T_1^{f,b}(x)}}{x-b} = \lim_{x\to b} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} - \lim_{x\to b} f'(b) = f'(b) - f'(b) = 0.$$

Pro $n \geq 2$: Podle L'H, horejší identity a indukce:

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)-T_n^{f,b}(x)}{(x-b)^n} = \lim_{x\to b} \frac{\left(f(x)-T_n^{f,b}(x)\right)'}{\left((x-b)^n\right)'} = \frac{1}{n} \overbrace{\lim_{x\to b} \frac{f'(x)-T_{n-1}^{f',b}(x)}{(x-b)^{n-1}}}^{\text{indukce}} = \frac{1}{n}\cdot 0 = 0$$

Nechť $p(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ s $b_j \in \mathbb{R}$ je lib. polynom, pro nějž platí limita 0. Pak:

$$\lim_{x\to b} \frac{p(x)-T_n^{f,b}(x)}{(x-b)^n} = \lim_{x\to b} \frac{p(x)-f(x)}{(x-b)^n} + \lim_{x\to b} \frac{f(x)-T_n^{f,b}(x)}{(x-b)^n} = 0+0=0.$$

Podle lemma o nulovém polynomu tak $p(x) = T_n^{f,b}(x)$.

Důsledek Taylorova aproximace: Když je $n \in \mathbb{N}_0$ a $f: U(b,\delta) \to \mathbb{R}$ má vlastní $f^{(n)}(b) \in \mathbb{R}$ (pro $n=0 \Rightarrow$ spojitá v b), pak pro $x \in U(b,\delta)$ je pro $x \to b$

$$f(x) = T_n^{f,b}(x) + o\left((x-b)^n\right) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(b)}{j!}(x-b)^j + \underbrace{o\left((x-b)^n\right)}_{e(x)}.$$

Tvrzení TP f' a f: Nechť $f: U(0,\delta) \to \mathbb{R}$ má vlastní $f': U(0,\delta) \to \mathbb{R}$ a vlastní $f^{(n+1)}(0) \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Pak pro $x \to 0$ platí:

$$f'(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j + o(x^n), \quad a_j \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = f(0) + \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{j+1} \cdot x^{j+1} + o(x^{n+1})$$

Taylorova řada: Nechť $f: U(a,\delta) \to \mathbb{R}$ má $\forall n \in \mathbb{N}$ vlastní $f^{(n)}: U(a,\delta) \to \mathbb{R}$.
Pokud $\forall x \in (a,\delta)$: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n$, říkáme že funkce $f(x)$ je na $U(a,\delta)$ se součtem své Taylorovy řady se středem v a.

Zbytek TP: $R_n^{f,a}(x) := f(x) - T_n^{f,a}(x)$, $x \in U(a,\delta)$

Věta Zbytky TP: Nechť je $n \in \mathbb{N}_0$, $f: U(a,\delta) \to \mathbb{R}$ a existují vlastní $f^{(n+1)}: U(a,\delta) \to \mathbb{R}$.

Pak platí následující:

1) Lagrangeův zbytek: $\forall x \in P(a,\delta)\ \exists c$ mezi a,x t.ž.

$$R_n^{f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}$$

2) Cauchyův zbytek: $\forall x \in P(a,\delta)\ \exists c$ mezi a,x t.ž.

$$R_n^{f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c) \cdot (x-c)^n}{n!} \cdot (x-a)$$

Tvrzení Bellova čísla B_n: $\forall x \in (-1,1)$ platí rozvoj:

$$e^{e^x - 1} = \exp(\exp(x)-1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!},$$ kde $B_n = \#$ rozkladů n-prvkové množiny.

Primitivní funkce Pro funkce $F, f: I \to \mathbb{R}$ def. na netriviálním int. $I \subset \mathbb{R}$ řekneme, že F je prim. k f a píšeme $F = \int f$, pokud F má na I vlastní derivaci a $\forall b \in I: F'(b) = f(b)$.

Věta Nejednoznačnost prim. funkce: $F_1, F_2, f: I \to \mathbb{R}$ jsou funkce def. na netriv. int. $I \subset \mathbb{R}$ a F_1 i F_2 jsou prim. k f. Pak $\exists c \in \mathbb{R}: F_1 - F_2 = c$ na I.

Naopak je-li F prim. k f, pak $\forall c \in \mathbb{R}$, $F + c$ je prim. k f.

Nechť $a, b \in I: a < b$. Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě, použitím pro funkci $F_1 - F_2$ na $[a,b]$ existuje $c \in (a,b)$ že:

$$\frac{(F_1-F_2)(b) - (F_1-F_2)(a)}{b-a} = (F_1-F_2)'(c) = F_1'(c) - F_2'(c) = f(c) - f(c) = 0.$$

Tedy $F_1(b) - F_2(b) = F_1(a) - F_2(a)$, takže $F_1(x) - F_2(x) = c$ pro c a $\forall x \in I$.

Druhá část: $(F+c)' = F' + c' = f + 0 = f$.

$f_n \to f$ (bodově konvergující funkce) $M \subset \mathbb{R}$, $f, f_n : M \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}$ jsou fce. Když:

$$\forall \varepsilon \, \forall x \in M \, \exists n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

píšeme $f_n \to f$ (na M), říkáme, že fce f_n konvergují na M bodově k f.

$f_n \rightrightarrows f$ (Stejnoměrně konvergující funkce: $M \subset \mathbb{R}$, $f, f_n : M \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}$ jsou fce. Když:

$$\forall \varepsilon \, \exists n_0 \, \forall x \in M : n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

píšeme $f_n \to f$ (na M), říkáme, že fce f_n konvergují na M stejnoměrně.

Věta Výměna limit: Nechť $f_n, f : M \to \mathbb{R}$, pro indexy $n \in \mathbb{N}$ a $M \subset \mathbb{R}$, $f_n \rightrightarrows f$ (na M), $A \in \mathbb{R}^*$ je lim. bod M a $\lim_{x \to A} f_n(x) = a_n \in \mathbb{R}$ $\forall n$. Potom:

$$\lim a_n = \lim_{x \to A} f(x), \quad \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to A} f_n(x) = \lim_{x \to A} \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

Věta Výměna $\frac{df}{dx}$ a $\lim_{x \to \infty}$: Pro indexy $n \in \mathbb{N}$ nechť $f_n : I \to \mathbb{R}$ jsou funkce def. na netriviálním intervalu $I \subset \mathbb{R}$, které splňují následující podmínky:

1) $\forall n \, \exists$ vlastní $f_n' : I \to \mathbb{R}$

2) $f_n' \rightrightarrows f$ (na I) pro nějakou $f : I \to \mathbb{R}$

3) $\exists a \in I : (f_n(a)) \subset \mathbb{R}$ konverguje Potom

$$f_n \to F \text{ (na } I) \text{ pro } F : I \to \mathbb{R} \; \exists F' : I \to \mathbb{R} \text{ a}$$

$$F' = f \text{ na } I, \text{ tj. } \left(\lim_{n \to \infty} f_n\right)' = \lim_{n \to \infty} f_n'.$$

Stejnoměrná spojitost Nechť $M \subset \mathbb{R}$. $f : M \to \mathbb{R}$ je stejnoměrně spojitá, pokud

$$\forall \varepsilon \, \exists \delta : a \in M \Rightarrow f[U(a,\delta) \cap M] \subset U(f(a), \varepsilon).$$

Jediné δ tak vyhovuje pro všechny body z M.

Věta Spojitost na kompaktu: Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je komp. množina. Je-li $f : M \to \mathbb{R}$ spojitá, je stejnoměrně spojitá.

Věta $\exists$ antiderivace : Nechť $f: I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce def. na netriv. int. $I \subset \mathbb{R}$.

Taková f má vždy prim. $F: I \to \mathbb{R}$.