1) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$x^2 = 2$ nemá v $\mathbb{Q}$ řešení.

Nechť $(a/b)^2 = 2$, pak $a^2 = 2b^2$, tedy a je sudé, tedy $a = 2c : c \in \mathbb{N}$.

Pak ale $(2c)^2 = 2b^2 \to 4c^2 = 2b^2 \to b^2 = 2c^2$ $\quad b < a$

$a^2 = 4c^2$, čili vždy je nyní právě menší než a, což je spor.

1) Cantorova věta

Pro žádnou množinu neexistuje surjekce:

$f: X \to \mathcal{P}(X)$ z ní na její potenci.

Pro spor nechť $f: X \to \mathcal{P}(X)$ je surjekce. Pak $Y := \{x \in X \mid x \notin f(x)\} \subset X$.

Protože f je na, $\exists\, y \in X : f(y) = Y$. Pak ale podmínky množiny $y \notin f(y) = Y$. $\boxed{\lightning}$

2) Jednoznačnost limity

Limita posl. je jednoznačná:

$\lim a_n = U$ a $\lim a_n = L \Rightarrow L = U$

Nechť je ε libovolné. Pak $\exists\, n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in (L, \varepsilon)$; $a_n \in (U, \varepsilon)$.

Tedy $\forall \varepsilon : U(U, \varepsilon) \cap U(L, \varepsilon) \neq \emptyset \Rightarrow U = L$

2) Cauchyova podmínka

Posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je konvergentní $\Leftrightarrow$ (a_n) je Cauchyovská.

$\Rightarrow$: Nechť je dáno ε a $\lim a_n = L$. Pak $\exists\, n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon/2$.

Tedy $m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a - a_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$,

tedy je Cauchyovská.

$\Leftarrow$: Nechť je (a_n) Cauchyovská. (a_n) je tedy omezená, tedy podle Bolzano–Weierstrasse má

konvergentní podposl. s lim L. Pro ε $\exists\, n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow |a_{m_n} - L| < \varepsilon/2$

a že $m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_{m_n} - a_n| < \varepsilon/2$. Vždy $m_n \geq n$, tedy:

$n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - L| \leq |a_n - a_{m_n}| + |a_{m_n} - L| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Tedy $a_n \to a$.

3) **Limita uspořádání**

Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$ a $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$, $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$. Platí následující:

1) Když $a < b$, tak $\exists n_0 : \forall m, n \geq n_0$, $a_m < b_n$

2) Když $\forall m, n \geq n_0 : a_m \geq b_n$, tak $a \geq b$

1) Nechť $a < b$. $\exists \varepsilon : U(a, \varepsilon) < U(b, \varepsilon)$. Pro $n_0 : \forall m, n \geq n_0 \Rightarrow a_m \in (a, \varepsilon)$ a $b_n \in (b, \varepsilon)$.

Tedy $m, n \geq n_0 \Rightarrow a_m < b_n$

2) Obměna implikace 1 je 2.

3) **Bolzano – Weierstrass**

Omezená $(a_n) \subset \mathbb{R}$ má vždy podposloupnost, co konverguje.

Jelikož je (a_n) omezená, je je její monotónní podposloupnost zaručena.

Pak ta má vlastní limitu, protože je omezená a monotónní.

4) **Nutná podmínka konvergence**

Konverguje-li řada $\sum a_n$, pak $\lim a_n = 0$

Když konverguje, tak $\lim s_n = S \in \mathbb{R}$. Podle jedinečnosti limity podposl. a arit. limit:

$$\lim s_n = \lim (s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = S - S = 0$$

4) **Harmonická řada**

Tzv. harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdots$ diverguje a má součet $+\infty$.

Nechť (h_n) jsou částečné součty harmonické řady a nechť (s_n) jsou

částečné součty řady: $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = a_3 = \frac{1}{4}, a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = \frac{1}{8}, \ldots$

$\Leftarrow \lim a_n = 0$, ale $s_1 < s_2 < s_3 \ldots s_{2^{k+1}-1} = \frac{k+1}{2} \to$ diverguje.

Pak $1/n > a_n \ \forall n$, tedy $h_n > s_n \ \forall n$. Protože $\lim s_n = +\infty$, podle věty o

jednom policajtovi i $\lim h_n = +\infty$.

5) Heineho definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{U}, L \in \mathbb{R}^*$, $\mathcal{U}$ je lim. bod M, $f: M \to \mathbb{R}$. Pak:

$$\lim_{x \to \mathcal{U}} f(x) = L \iff \forall (a_n) \subset M \setminus \{\mathcal{U}\} : \lim a_n = \mathcal{U} \Rightarrow \lim f(a_n) = L.$$

$\Rightarrow$ Nechť je dáno ε. Pak $\exists \delta : \forall x \in P(\mathcal{U}, \delta) \cap M$ je $f(x) \in U(L, \varepsilon)$.

Pro toto δ $\exists n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in P(\mathcal{U}, \delta) \cap M$. Tedy $n \geq n_0 \Rightarrow f(a_n) \in U(L, \varepsilon)$ a $f(a_n) \to L$.

$\neg \Rightarrow \neg$ Nechť $\lim\limits_{x \to \mathcal{U}} f(x) \neq L$. Tedy $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \ \exists b \in P(\mathcal{U}, \delta) \cap M$, ale $f(b) \notin U(L, \varepsilon)$.

Položíme $\delta = \frac{1}{n}$ pro $n \in \mathbb{N}$, $\forall n$ vybereme $b_n := \in P(\mathcal{U}, 1/n) \cap M$ a $\notin U(L, \varepsilon)$.

Posloupnost (b_n) leží v $M \setminus \{\mathcal{U}\}$, limití k $\mathcal{U}$, $f(b_n)$ ale k L nelimití.

5) Aritmetika limit funkcí

Nechť je $M \subset \mathbb{R}$, $A, \mathcal{U}, L \in \mathbb{R}^*$, A je lim. bod M, $f, g : M \to \mathbb{R}$,

$\lim\limits_{x \to A} f(x) = \mathcal{U}$, $\lim\limits_{x \to A} f(x) = L$. Pak platí následující:

1) $\lim\limits_{x \to A} \left(f(x) + g(x)\right) = \mathcal{U} + L$

2) $\lim\limits_{x \to A} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = \mathcal{U} \cdot L$

3) $\lim\limits_{x \to A} \left(f(x) / g(x)\right) = \mathcal{U} / L$

Pokud je pravá strana definována.
Speciálně pro $\frac{f(x)}{g(x)} : g(x) = 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} := 0$

Důkazy jsou podobné:

3) Nechť $(a_n) \subset M \setminus \{A\}$ s $\lim a_n = A$. Pak podle Heineho definice: $\lim f(a_n) = \mathcal{U}$, $\lim g(a_n) = L$.

Podle věty o aritmetice limit: $\lim \frac{f(a_n)}{g(a_n)} = \frac{\lim f(a_n)}{\lim g(a_n)} = \frac{\mathcal{U}}{L}$.

Jelikož to platí pro každou posloupnost, tak: $\lim\limits_{x \to A} \left(f(x) / g(x)\right) = \mathcal{U}/L$.

6) Nabývání mezihodnot

Nechť $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ je spoj. funkce a $f(a)<c<f(b)$ nebo $f(a)>c>f(b)$. Pak $\exists d\in(a,b): f(d)=c$.

Předpokládejme $f(a)<c<f(b)$. Nechť $A:=\{x\in[a,b] \mid f(x)<c\}$ a $d:=\sup(A)\in[a,b]$.

Ukážeme, že $f(d)<c$, $f(d)>c$ vede ke sporu.

Ze spojitosti funkce f v a a v b plyne, že $d\in(a,b)$.

Nechť $f(d)<c$. Ze spojitosti f v d plyne, že $\exists\delta: x\in U(d,\delta)\cap[a,b] \Rightarrow f(x)<c$.

Pak ale A obsahuje prvky větší jak d, což je spor s horní mezí množiny.

Nechť $f(d)>c$. Ze spojitosti f v d plyne, že $\exists\delta: x\in U(d,\delta)\cap[a,b] \Rightarrow f(x)>c$.

Pak ale $\forall x\in[a,d)$ dostatečně blízko d leží mimo A, tedy spor s nejmenší horní mezí.

6) Princip minima a maxima

$\to$ $\forall$ posl. má konvergentní podposl.

Nechť $M\subset\mathbb{R}$ je neprázdná kompaktní množina a $f:M\to\mathbb{R}$ je spojitá.
Pak existují taková $a,b\in M$, že: $\forall x\in M: f(a)\le f(x)\le f(b)$.

Důkaz maxima f:

Platí $f[M]\neq\emptyset$ a ukážeme, že je shora omezená. Kdyby nebyla, měli by posloupnost s nevlastní limitou $\lim (a_n)=+\infty$ a dostali bychom spor.

Lze tedy definovat $s:=\sup(f[M])\in\mathbb{R}$, takže existuje $(a_n)\subset M$ s $\lim a_n = s$.

Díky kompaktnosti má (a_n) konvergentní podposl. (a_{m_n}) s $b:=\lim a_{m_n}\in\mathbb{R}$.

Pak $\lim f(a_{m_n}) = \lim f(b) = s$. Protože $s=f(b)$ je horní mez $[M]$, je $f(b)\ge f(x)\ \forall x\in M$.

7) Příznak extrému

Nechť $b\in M$ je OLB $M\subset\mathbb{R}$, $f:M\to\mathbb{R}$ je funkce s $f'(b)\in\mathbb{R}^*\neq 0$. Potom:

$$\forall\delta\ \exists c,d\in U(b,\delta)\cap M: f(c)<f(b)<f(d)$$

Nechť je dáno δ. Předpokládejme $f'(b)<0$, opačný případ je obdobný.

Vezmeme tak malé ε, že $U(f'(b),\varepsilon)<\{0\}$. Pak existuje θ: $x\in P(b,\theta)\cap M \Rightarrow \frac{f(x)-f(b)}{x-a}\in U(f'(b),\varepsilon)$.

Tedy když $x\in P^-(b,\theta)\cap M$, pak $f(x)>f(b)$, protože $x-b<0$ a zlomek je záporný.

Podobně pro P^+. Nechť $\theta\le\delta$. Můžeme vzít $c\in P^+(b,\theta)\cap M$, $d\in P^-(b,\theta)\cap M$. Oba prvky existují, protože b je OLB M. Dostáváme $c,d\in U(b,\delta)\cap M$, $f(c)<f(b)$, $f(d)>f(b)$.

7) Leibnizův vzorec

Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$ je lim. bod M, $f, g : M \to \mathbb{R}$, f nebo g spoj. v a. Pak:

$(fg)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$, je-li pravá strana definována.

Nechť g spojitá v a, druhý případ je symetrický. Podle AL:

$$(fg)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(f(x) - f(a)) \cdot g(x) + f(a) \cdot (g(x) - g(a))}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} g(x) + f(a) \cdot \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

$$= f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a).$$

8) Lagrangeova věta

Nechť $a < b \in \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je spoj. s f' v $\forall x \in (a,b)$. Potom:

$$\exists c \in (a,b) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Uvažme $g(x) := f(x) - (x-a) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b - a} : [a,b] \to \mathbb{R}$. Splňuje předpoklady Rolleovy věty.

$g(a) = g(b) = f(a)$, takže:

$0 = g'(c) = f'(c) - (f(b) - f(a))/(b-a)$ pro nějaké $c \in (a,b)$ a jsme hotovi.

8) Derivace a monotonie

Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je int. a $f : I \to \mathbb{R}$ je spoj., která má f' v $\forall x \in I^\circ$.

Pak platí následující:

1) $f' \geq 0$, resp. $f' \leq 0$ na I° => f je na I neklesající, resp. nerostoucí

2) To samé pro ostré nerovnosti => ryzí...

Nechť $f' < 0$ na I°, $x < y \in I$. Pak: $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(z) < 0$ pro $z \in (x,y) \subset I^\circ$.

Protože $y - x > 0$, je čitatel záporný, tedy $f(y) < f(x)$ a f na I klesá.

9) Taylorův polynom

Nechť je $n \in \mathbb{N}_0$, $f: U(b,\delta) \to \mathbb{R}$ má vlastní $f^{(n)}(b) \in \mathbb{R}$. Pro $n=0$ se tím myslí spojitost v bodě.

Pak existuje právě jeden polynom $p(x) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(b)\cdot(x-b)^j}{j!}$, že $\lim_{x\to b} \frac{f(x)-f(b)}{(x-b)^n} = 0$

Nulové lemma: Pro $\forall b \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}_0$ a $\forall p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^n$ s $a_j \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to b} \frac{p(x)}{(x-b)^n} = 0 \Rightarrow \forall j: a_j = 0$$

Indukcí podle n: Pro $n=0$ to platí, $a_0/1 \to 0$, $a_0 = 0$.

Nechť $n>0$ a platí limita v předpokladu. Pak $p(b) = \lim_{x\to b} p(x) = 0$.
Tedy b je kořenem $p(x) = (x-b)\cdot q(x)$, kde $q(x)$ je polynom stupně nejvýš $n-1$.

$$0 = \lim_{x\to b} \frac{p(x)}{(x-b)^n} = \lim_{x\to b} \frac{q(x)}{(x-b)^{n-1}},$$ na což platí indukční předpoklad. Tedy opět jde o nulový polynom.

Nejdřív dokážeme limitu:

Pro $n=0$ to plyne ze spojitosti.
Pro $n=1$ podle AL:

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x) - \underbrace{(f(b)+f'(b)\cdot(x-b))}_{T_1^{f,b}(x)}}{x-b} = \lim_{x\to b}\frac{f(x)-f(b)}{x-b} - \lim_{x\to b} f'(b) = f'(b) - f'(b) = 0$$

Pro $n \geq 2$: podle l'H:

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)-T_n^{f,b}(x)}{(x-b)^n} = \lim_{x\to b} \frac{\left(f(x)-T_n^{f,b}(x)\right)'}{\left((x-b)^n\right)'} = \frac{1}{n}\lim_{x\to b}\frac{f'(x)-T_{n-1}^{f',b}(x)}{(x-b)^{n-1}} = \frac{1}{n}\cdot 0 = 0.$$

Jednoznačnost: nechť $p(x)$ je lib. polynom $\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$, pro nějž platí limita $=0$.

Pak:

$$\lim_{x\to b}\frac{p(x)-T_n^{f,b}(x)}{(x-b)^n} = \lim_{x\to b}\frac{p(x)-f(x)}{(x-b)^n} + \lim_{x\to b}\frac{f(x)-T_n^{f,b}(x)}{(x-b)^n} = 0+0 = 0$$

tedy $p(x) = T_n^{f,b}(x)$.

9) Nejednoznačnost PF

$F_1, F_2, f: I \to \mathbb{R}$, def. na netriv. $I \subset \mathbb{R}$, F_1 i F_2 prim. k f.

Pak existuje $c \in \mathbb{R}$: $F_1 - F_2 = c$ na I. Tedy jeli F prim k f, je i $F+c$ prim k f.

Nechť $a < b \in I$. Podle Lagrangeovy věty pro $F_1 - F_2$ $\exists c \in (a,b)$:

$$\frac{(F_1-F_2)(b) - (F_1-F_2)(a)}{(b-a)} = (F_1-F_2)'(c) = F_1'(c) - F_2'(c) = f(c) - f(c) = 0.$$

Tedy $F_1(b) - F_2(b) = F_1(a) - F_2(a)$, takže $F_1(x) - F_2(x) = c$ $\forall x \in I$ a nějaké c.

$(F+c)' = F' + c' = f + 0 = f$.

10) Monotonie (N) $\int$

Pokud jsou $f, g \in N(a,b)$ a $f \leq g$ na (a,b), pak:

$$(N)\int_a^b f \leq (N)\int_a^b g.$$

Nechť F a G jsou prim k f a g. Vezmeme $c < d \in (a,b)$ a pomocí Lagrangeovy věty pro $F-G$ na $[c,d]$ dostaneme $e \in (c,d)$:

$$\begin{aligned}(F(d) - G(d)) - (F(c) - G(c)) &= (F-G)'(e) \cdot (d-c) \\ &= (F'(e) - G'(e)) \cdot (d-c) \\ &= (f(e) - g(e)) \cdot (d-c) \leq 0.\end{aligned}$$

Proto $F(d) - F(c) \leq G(d) - G(c)$. Nerovnost se zachová $c \to a$ and $d \to b$ a dostáváme uvedenou nerovnost.

11) Derivace jsou Darbouxovy

Každá $f: I \to \mathbb{R}$ pro $I \subset \mathbb{R}$, která má prim F, má Darbouxovu vlastnost.

Nechť $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, kde $a < b \in \mathbb{R}$ s prim. $F: [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(a) < c < f(b)$.

$G(x) := F(x) - cx : [a,b] \to \mathbb{R}$. Ta má na $[a,b]$ konečnou $G'(x) = F'(x) - c = f(x) - c$.

Speciálně je G spojitá. G v $d \in [a,b]$ nabývá minima.

Z $G'(a) = f(a) - c < 0$ a $G'(b) = f(b) - c > 0$. Pak je $d \in (a,b)$.

Pak $f(d) - c = G'(d) = 0$, takže $f(d) = c$.

11) Bachetova identita

Nechť $p(x)$ a $q(x)$ v $\mathbb{R}[x]$ jsou dva polynomy bez společného komplex. kořene, tj. pro žádné $z \in \mathbb{C}$ neplatí: $p(z) = q(z) = 0$. Pak existují polynomy $r(x), s(x) \in \mathbb{R}[x]$, že:

$$r(x) \cdot p(x) + s(x) \cdot q(x) = 1$$

Nechť $S := \{ r(x) \cdot p(x) + s(x) \cdot q(x) = 1 \mid r(x), s(x) \in \mathbb{R}[x] \}$.

Vezmeme nenulový $f(x) \in S$ s nejmenším stupněm. Libovolný $a(x)$ v S dělíme $f(x)$ se zbytkem:

$a(x) = f(x) \cdot b(x) + c(x)$, kde $b(x), c(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg(c(x)) < \deg(f(x))$, nebo $c(x)$ nulový.

Ale $c(x) = a(x) - b(x) \cdot f(x) \in S$. $c(x)$ je tedy nulový a $a(x) = b(x) f(x) - f(x)$ dělí každý polynom v S.

Tzn. že dělí jak $p(x)$, tak $q(x)$. Ty ale nemají společný komplexní kořen, takže $f(x)$ je nenulový konst. polynom. Předpokládejme $f(x) = 1$ a dostali jsme identitu.

12) Neomezené funkce jsou špatné

Pokud je $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ neomezená, pak $f \notin \mathcal{R}(a,b)$.

12) Baireova věta

Jsou-li $a < b \in \mathbb{R}$, $[a,b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, pak některá M_n není řídká.

13) $\underline{\int} \leq \overline{\int}$

Nechť $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Pak $\forall P, Q \in D(a,b)$:

$$s(P,f) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq S(Q,f)$$

13) Zvnm 1

Nechť $f: [a,b] \to \mathbb{R} \in \mathcal{R}(a,b)$. Potom $\forall x \in (a,b]$ je $f \in \mathcal{R}(a,x)$ a funkce $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ daná:

$F(x) := \int_a^x f$, je lipschitzovsky spojitá, navíc $\forall$ bod spojitosti $x \in [a,b]$: $F'(x) = f(x)$

13) Abelova sumace

Nechť $(a_n) \subset \mathbb{R}$, $a < b \in \mathbb{R}^+$, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ má vlastní $f' \in \mathcal{R}(a,b)$ na (a,b).

Pak platí:

$$\sum_{a < n \leq b} a_n f(n) = \left[A(x) f(x) \right]_a^b - \int_a^b A(x) f'(x)$$