

# Matematická analýza 1 (NMAI054)

## 11. přednáška

Tereza Klimošová

[tereza@kam.mff.cuni.cz](mailto:tereza@kam.mff.cuni.cz)

28.dubna 2022

# Určitý integrál

- výpočet ploch, objemů, energie a práce a dalších fyzikálních veličin, odhadování součtů ...

## Definice

Předpokládejme, že máme dáno  $a, b \in \mathbb{R}$ , kde  $a < b$ . Funkce  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  má na intervalu  $(a, b)$  *Newtonův integrál*, když má na  $(a, b)$  primitivní funkci  $F$  a ta má **vlastní** jednostranné limity

$$F(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) \quad \text{a} \quad F(b^-) = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x).$$

Symbolem  $[F]_a^b$  označme rozdíl  $F(b^-) - F(a^+)$ . *Newtonův integrál* funkce  $f$  na intervalu  $(a, b)$  pak definujeme jako

$$(N) \int_a^b f(x) dx := [F]_a^b = F(b^-) - F(a^+) = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x).$$

# Newtonův integrál

$$(N) \int_a^b f(x) dx := [F]_a^b = F(b^-) - F(a^+) = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x).$$

- Protože každé dvě funkce primitivní k  $f$  na  $(a, b)$  se liší jen o aditivní konstantu, rozdíl limit  $F(b^-) - F(a^+)$  na volbě  $F$  nezávisí a definice Newtonova integrálu je korektní.
- Třidu newtonovsky integrovatelných funkcí značíme

$$\mathcal{N}(a, b) = \{f : f \text{ má na } (a, b) \text{ Newtonův integrál}\}.$$

- Pokud je integrační proměnná jasná z kontextu, často místo  $(N) \int_a^b f(x) dx$  píšeme jen  $(N) \int_a^b f$ .

► Kvíz [www.menti.com 5803 3649](https://www.menti.com/58033649) Nechť  $a < b < c$  jsou tři reálná čísla. Nechť  $f$  je funkce, která je newtonovsky integrovatelná na  $(a, b)$  i na  $(b, c)$ . Potom  $f$  je také newtonovsky integrovatelná na  $(a, c)$  a platí  $(N) \int_a^b f + (N) \int_b^c f = (N) \int_a^c f$ .

# Newtonův integrál a spojitost

## Věta

*Je-li funkce  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  spojitá, pak  $(N) \int_a^b f(x) dx$  existuje.*

► Důkaz

Nechť nám  $f: \operatorname{sgn}(x)$   $(-1, 0), (0, 1)$  ✓

$(-1, 1)$  ✗ nemá primitivní funkci v bodě 0

# Newtonův integrál a spojitost

## Věta

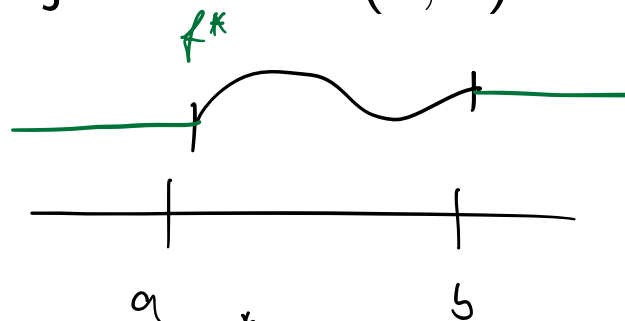
Je-li funkce  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  spojitá, pak  $(N) \int_a^b f(x) dx$  existuje.

### ► Důkaz

*taková funkce má primitivní funkci*

- potřeba předpokládat spojitost  $[a, b]$ , spojitost  $f$  na  $(a, b)$  nezaručuje existenci určitého integrálu

2  $f$  uděláme funkci spojitou na  $\mathbb{R}$ :  $f^* = \begin{cases} f(x) & x \in [a, b] \\ f(a) & x < a \\ f(b) & x > b \end{cases}$



*$f^*$  má prim. spojitou funkci  $F$*

- spojitost na  $[a, b]$  ani omezenost není nutná

$$(N) \int_a^b f^* = (N) \int_a^b f = F(b) - F(a)$$

# Metody výpočtu Newtonova integrálu

## Věta (Per partes pro určitý integrál)

Nechť  $f$  a  $g$  jsou dvě funkce spojité na  $[a, b]$ . Nechť mají  $f$  a  $g$  na  $(a, b)$  primitivní funkce  $F$  a  $G$ , které lze spojitě rozšířit na  $[a, b]$ . Potom existují oba určité integrály  $(N) \int_a^b fG$  a  $(N) \int_a^b Fg$  a platí

$$(N) \int_a^b fG = [FG]_a^b - (N) \int_a^b Fg.$$

*součin primitivních funkcí v krajních bodech*

► Důkaz

$fG, Fg$  jsou spojité  $\Rightarrow$  dle před. věty  $\exists (N) \int_a^b fG, (N) \int_a^b Fg$ .

$$L = \int fG$$
$$P = \int Fg$$

$$(N) \int_a^b fG = [L]_a^b = [FG - P]_a^b \stackrel{AL}{=} [FG]_a^b - [P]_a^b$$

*per partes.*  
 $L = FG - P$

# Metody výpočtu Newtonova integrálu

- pokud  $a < b$ , tak výraz  $(N) \int_b^a f$  definujeme jako  $-(N) \int_a^b f$  a podobně  $[F]_b^a$  položíme rovno  $-[F]_a^b$
- $(N) \int_b^b f := 0$  pro libovolné  $b$  a  $f$
- *vnitřek* intervalu  $J$  = množina vnitřních bodů  $J$ , tj. otevřený interval

## Věta (Substituce pro určitý integrál)

*Nechť  $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá funkce, která má ve všech bodech otevřeného intervalu  $(\alpha, \beta)$  vlastní derivaci. Označme  $J := \varphi((\alpha, \beta)) = \{\varphi(t); t \in (\alpha, \beta)\}$ . Ze spojitosti  $\varphi$  na  $[\alpha, \beta]$  plyne, že  $J$  je omezený interval. Nechť  $f$  je funkce spojitá na  $J$  a newtonovsky integrovatelná na vnitřku  $J$ . Potom*

$$(N) \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = (N) \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx,$$

*speciálně tedy levá i pravá strana existuje.*

# Metody výpočtu Newtonova integrálu

Nechť  $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá funkce, která má ve všech bodech otevřeného intervalu  $(\alpha, \beta)$  vlastní derivaci. Označme  $J := \varphi((\alpha, \beta)) = \{\varphi(t); t \in (\alpha, \beta)\}$ . Ze spojitosti  $\varphi$  na  $[\alpha, \beta]$  plyne, že  $J$  je omezený interval. Nechť  $f$  je funkce spojitá na  $J$  a newtonovsky integrovatelná na vnitřku  $J$ . Potom

$$(N) \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = (N) \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx,$$

speciálně tedy levá i pravá strana existuje.

- na pravé straně rovnosti nemusí integrační meze splňovat  $\varphi(\alpha) < \varphi(\beta)$
- interval  $J$  může být otevřený, uzavřený, nebo polootevřený
- nutno ověřit předpoklady pro  $f$  na celém intervalu  $J$ , který může být větší než interval ohraničený hodnotami  $\varphi(\alpha)$  a  $\varphi(\beta)$
- není nutné aby  $\varphi(\alpha)$  a  $\varphi(\beta)$  patřily do  $J$
- pokud  $J$  obsahuje krajní body, je v nich třeba ověřit (jednostrannou)

# Příklady

Není nutné, aby  $y(a)$  a  $y(b)$  patřily do  $J$ .

$$x = \sin t = y(t)$$

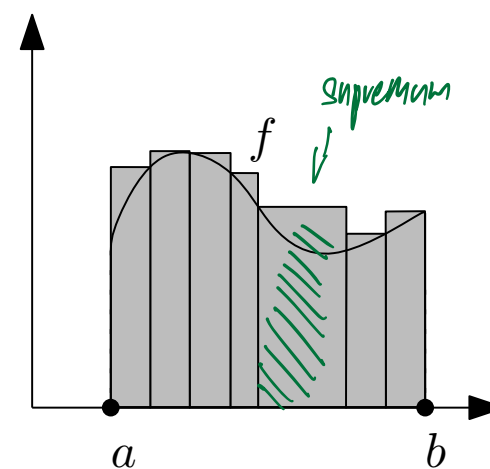
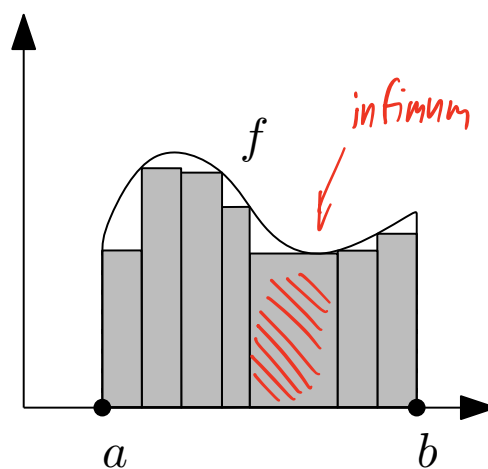
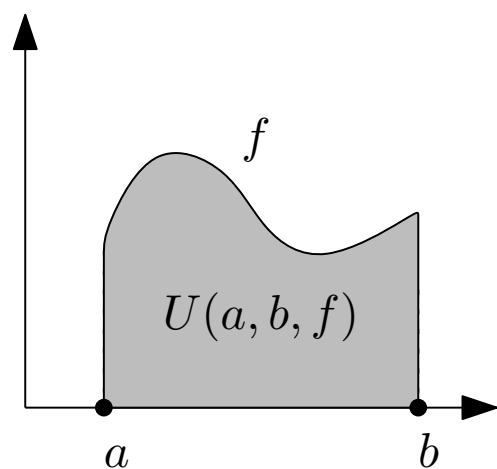
$$(N) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sqrt{1-\sin t}} dt = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$$

✓  
✓  
správně použít větu ač  $f$  není def  $x=1$

Nelze:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos t}{\sqrt{1-\sin t}} dt \neq \int_0^0 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx \quad \text{protože } f \text{ není spojité } x=1$$

# Riemannův integrál — „plocha pod grafem funkce“



# Riemanna suma

## Definice (Riemanna suma)

Nechť  $-\infty < a < b < +\infty$  jsou dvě reálná čísla. Konečná  $(k + 1)$ -tice bodů  $D = (a_0, a_1, \dots, a_k)$  z intervalu  $[a, b]$  je jeho *dělením*, pokud

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k = b.$$

Tyto body dělí interval  $[a, b]$  na intervaly  $I_i = [a_i, a_{i+1}]$ . Délku intervalu označíme pomocí absolutní hodnoty:  $|I_i| = a_{i+1} - a_i$  a  $|[a, b]| = b - a$ .

Pro funkci  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  a dělení  $D = (a_0, a_1, \dots, a_k)$  intervalu  $[a, b]$  definujeme *dolní*, respektive *horní, Riemannovu sumu* jako

$$s(f, D) = \sum_{i=0}^{k-1} |I_i| m_i, \quad \text{respektive} \quad S(f, D) = \sum_{i=0}^{k-1} |I_i| M_i,$$

kde  $m_i = \inf\{f(x); x \in I_i\}$  a  $M_i = \sup\{f(x); x \in I_i\}$ .

Tyto součty jsou vždy definované,  $s(f, D) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  a  $S(f, D) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ .

# Riemannův integrál

## Definice (Horní a dolní Riemannův integrál)

*Dolní*, respektive *horní*, *Riemannův integrál* funkce  $f$  na intervalu  $[a, b]$  definujeme jako

$$\underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f(x) dx = \sup\{s(f, D) : D \text{ je dělení } [a, b]\},$$

respektive

$$\overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f(x) dx = \inf\{S(f, D) : D \text{ je dělení } [a, b]\}.$$

Tyto výrazy jsou vždy definované a  $\underline{\int_a^b} f, \overline{\int_a^b} f \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .

# Riemannův integrál

## Definice (Riemannův integrál)

Řekneme, že funkce  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  má na intervalu  $[a, b]$  *Riemannův integrál*, případně že je *riemannovsky integrovatelná*, pokud

$$\underline{\int_a^b} f(x) dx = \overline{\int_a^b} f(x) dx \in \mathbb{R}.$$

Tuto společnou konečnou hodnotu, když existuje, značíme

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f$$

a nazýváme Riemannovým integrálem funkce  $f$  na intervalu  $[a, b]$ . Třídu všech riemannovsky integrovatelných funkcí označujeme

$$\mathcal{R}[a, b] := \{f : f \text{ je definovaná a riemannovsky integrovatelná na } [a, b]\}.$$

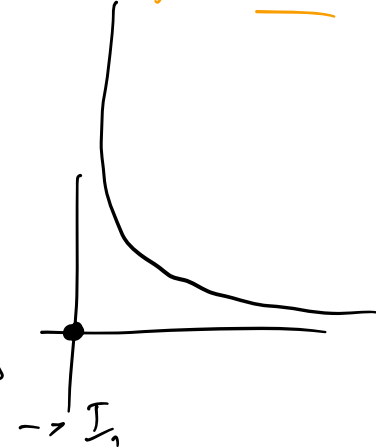
# Vlastnosti Riemannova integrálu a sum

ok<sup>v</sup> vzemen jakekoliv malý  
interval, tent bude  $+\infty$   
jako nerástení

- neomezená funkce není Riemannovsky integrovatelná

$$f = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \in (0, 1) \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \text{nemá } R S \text{ na } [0, 1] : \nexists D \quad S(f, D) = +\infty$$

$$\sup I_n(f) = +\infty$$



- dolní Riemannova suma je menší nebo rovna horní Riemannově sumě téhož dělení – platí i pro libovolná dělení

- Riemannův integrál (pokud existuje) lze shora odhadnout horní a zdola dolní Riemannovou sumou

Nechť máme  $D$  a zjemnění  $D'$  :

$$s(f, D) \leq s(f, D') \quad \text{dolní riemann}$$

$$S(f, D) \geq S(f, D') \quad \text{horní riemann}$$

$$s(f, D) \leq \int \leq S(f, D)$$

$$D'' = D_1 \cup D_2 \quad s(f, D_1) \leq s(f, D'') \leq S(f, D_2)$$