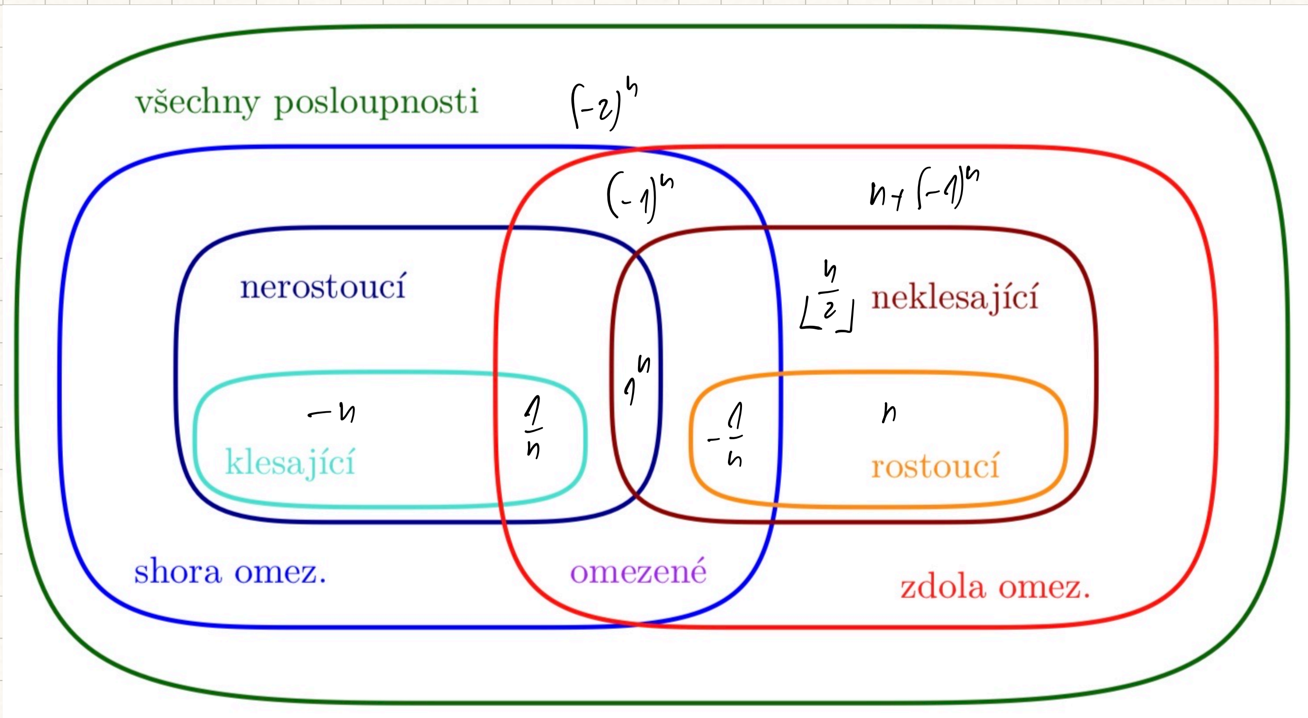
Posloupnost

Nechť M je množina. Pak posloupnost je zobrazení z $\mathbb{N}$ do M.

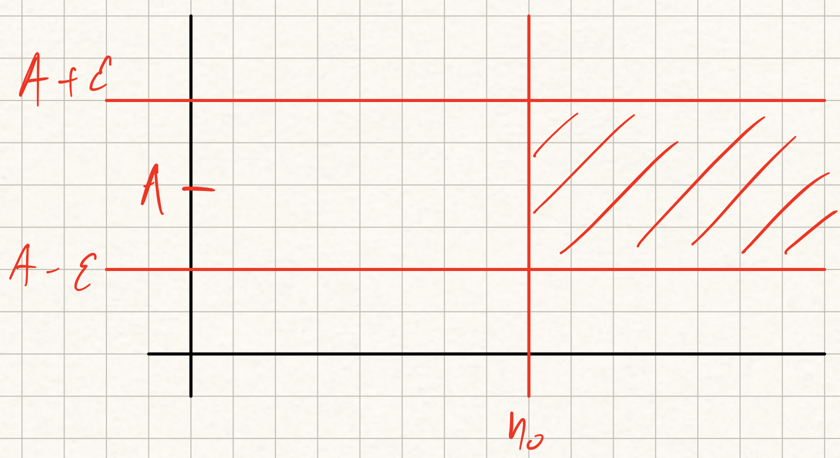


Vlastní limity

Nechť a_n je posloupnost $\mathbb{R}$. $A \in \mathbb{R}$ je (vlastní) limita posloupnosti (a_n), pokud pro každé $\mathbb{R}$ $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $\mathbb{N}$ $n \geq n_0$ je $|a_n - A| < \varepsilon$. Pokud posloupnost má svou limitu, říkáme, že konverguje.

→ pokud vzdálenost konverguje k nule

$$\lim_{n \to \infty} a_n = A \iff \lim_{n \to \infty} d(a_n, A) = 0$$



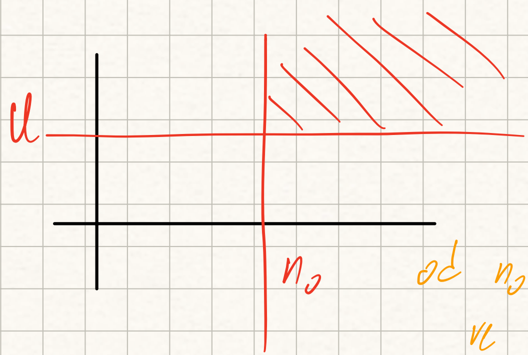
od n_0 to žije už jen v zadaném úseku

Nevlastní limita

$+/- \infty$

Nechť (a_n) je posloupnost reálných čísel. Řekneme, (a_n) má *(nevlastní) limitu* ∞, píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, pokud pro každé reálné číslo K existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé přirozené číslo $n \geq n_0$ je $a_n > K$. Řekneme, (a_n) má *(nevlastní) limitu* $-\infty$, píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ pokud pro každé reálné číslo K existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé přirozené číslo $n \geq n_0$ je $a_n < K$.

Taková posloupnost nekonverguje!



od n_0 všechno dál žije ve vybraném úseku

Jednoznačnost limity pos!

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Sporem: Nechť máme 2, $U < L$. Vezmeme $\varepsilon > 0$ tak malé, že $\varepsilon < (L-U)/2$. Jelikož jsou dvě limity, existují n_1, n_2 takové, že $n > n_1 \Rightarrow |a_n - U| < \varepsilon$,

$n > n_2 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$

Pak ale pro $n > \max(n_1, n_2)$ platí obě nerovnosti zároveň:

$$|a_n - U| < \varepsilon \ \& \ |a_n - L| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow L - U = |L-K| \leq |L - a_n| + |a_n - U| < 2\varepsilon < L - U \qquad \boxed{\lightning}$$

O limitě monotónní posl.

Je-li posloupnost $\mathbb{R}$ (a_n) neklesající a shora omezená, pak konverguje.
- stejně tak nerostoucí a zdola omezená
- je-li a_n neklesající a shora neomezená $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = \infty$
- je-li a_n nerostoucí a zdola neomezená $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = -\infty$

Supremum je def. shora omezenosti.

$$a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a$$

→ musí existovat tato nerovnost, jinak by to už samo bylo supremum.

Pak díky monotónnosti a faktu, že a je supremum, můžeme tvrdit, že to platí pro všechny a_n. Tím pádem $\lim a_n = a$

Podposloupnost

Posloupnost (b_n) je podposloupnost (a_n), když existuje rostoucí zobrazení $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, že $b_n = a_{f(n)}$

$b_n = a_{k_n}, n = 1, 2, \ldots, 3$

Relace je tranzitivní, reflexivní a není antisymetrická

Dvě nejsou stejné a nemusí platit antisym. ↓ jelikož můžu vybrat dvě podposl. které se budou lišit pouze počtem prvků

O limitě podposloupnosti

Je-li (b_n) podposloupnost (a_n) and $\lim_{n \to \infty} a_n = a \in \mathbb{R} \cup \{+/- \infty\}$, pak also

$$\lim_{n \to \infty} b_n = a$$

Důsledek: Mám-li dvě podposloupnosti s různými limitami $\Rightarrow$ posloupnost nemá limitu.

posl. $(-1)^n$, podposl.: $\lim (-1)^{2n} = 1$

$\lim (-1)^{2n+1} = -1$ $\quad 1 \neq -1$, $(-1)^n$ nemá limitu

V $\mathbb{R} \cup \{+/- \infty\}$

$$\forall a \in \mathbb{R}: \; -\infty < a < +\infty\,;$$
$$\forall a \in \mathbb{R}^*, a \neq -\infty: \; a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty\,;$$
$$\forall a \in \mathbb{R}^*, a \neq +\infty: \; a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty\,;$$
$$\forall a \in \mathbb{R}^*, a > 0: \; a(\pm\infty) = (\pm\infty)a = \pm\infty\,;$$
$$\forall a \in \mathbb{R}^*, a < 0: \; a(\pm\infty) = (\pm\infty)a = \mp\infty\,;$$
$$\forall a \in \mathbb{R}: \; \frac{a}{\pm\infty} = 0\,.$$

Zbylé výrazy jsou nedefinované, tedy neurčité.

$$(+\infty) + (-\infty),\; (-\infty) + (+\infty),\; 0 \cdot (\pm\infty),\; (\pm\infty) \cdot 0,\; \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\; \frac{a}{0} \;\text{ pro }\; a \in \mathbb{R}^*$$

Aritmetika limit

Nechť $(a_n), (b_n)$ jsou posloupnosti $\mathbb{R}$, každá obě lim. $\in \mathbb{R}^*$. Pak:

- $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \lim_a + \lim_b$, je-li výraz na pravé straně definován
- $\lim (a_n b_n) = \lim_a \cdot \lim_b$, je-li výraz na pravé straně definován
- $\lim \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_a}{\lim_b}$, pokud $\lim_b \neq 0$ pro $\forall n > n_0$ a výraz vpravo je definován

Funguje jen jednosměrně!

Násobení limitní nulou

Nechť mám omezenou posl. (a_n) a (b_n) konverguje k 0.

Pak $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n b_n) = 0$

O limitě a uspořádání

Nechť mám posl. $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ mají vlastní limity $a, b \in \mathbb{R}$.

- Když $a < b$, tak existuje n_0, že $n > n_0 \Rightarrow a_n < b_n$
- Když $a_n \le b_n$ pro $\forall n > n_0$, pak $a \le b$

Platí i pro nevlastní limity.

Vychází z logické úvahy

Musí existovat prvek, co je větší než ta samotná limita dané podposloupnosti.

O dvou policajtech

Posl. $(a_n), (b_n), (c_n) \subset \mathbb{R}$ splňují, že $\lim_a = \lim_b$ and $\forall n > n_0 \; a_n \le c_n \le b_n$, pak (c_n) konverguje a $\lim_c = \lim_a = \lim_b$

Díky předchozí větě musí platit, že pokud má c_n limitu, je rovna $\lim_a = \lim_b$
Dokážeme tedy pouze existenci limity c_n.

Z def.

Pro $\varepsilon > 0 \; \exists n_a : a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \; \forall n \ge n_a$. Obdobně pro b.

Pak $n_0 = \max(n_a, n_b)$. Pak ale dohromady:

$\forall n \ge n_0$:

$$a - \varepsilon < a_n \le c_n \le b_n < a + \varepsilon, \text{ tedy } c_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

Pokud chci rozšířit na nevlastní limity, stačí pouze jeden policajt:

pro $a = +\infty$, a_n
pro $a = -\infty$, b_n