

# Matematická analýza 1 (NMAI054)

## 3. přednáška

Tereza Klimošová

[tereza@kam.mff.cuni.cz](mailto:tereza@kam.mff.cuni.cz)

3.března 2022

# Hromadný bod

$$(-1)^n \begin{cases} (-1)^{2n} = \lim = 1 \\ (-1)^{2n+1} = \lim = -1 \end{cases} \text{ hromadní body}$$

## Definice (Hromadný bod)

Nechť  $(a_n)$  je posloupnost reálných čísel. Rozšířené reálné číslo  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  je jejím **hromadným bodem**, pokud je limitou nějaké podposloupnosti  $(a_n)$ .

Z Věty o limitě podposloupnosti plyne, že pokud má posloupnost  $(a_n)$  limitu  $a$ ,  $a$  je jediným hromadným bodem  $(a_n)$ .

Kolik hromadných bodů má posloupnost  $(\frac{n}{n+1} \sin(n\frac{\pi}{4}))$ ?

www.menti.com: 9792 1460 [► Kvíz](#)

$L$  - posloupnost má nepřechodnou množinu hromadných bodů

# Monotónní podposloupnost

Věta (O monotónní podposloupnosti)

*Každá posloupnost  $(a_n) \subset \mathbb{R}$  má monotónní podposloupnost.*

# Monotónní podposloupnost

## Věta (O monotónní podposloupnosti)

Každá posloupnost  $(a_n) \subset \mathbb{R}$  má monotónní podposloupnost.

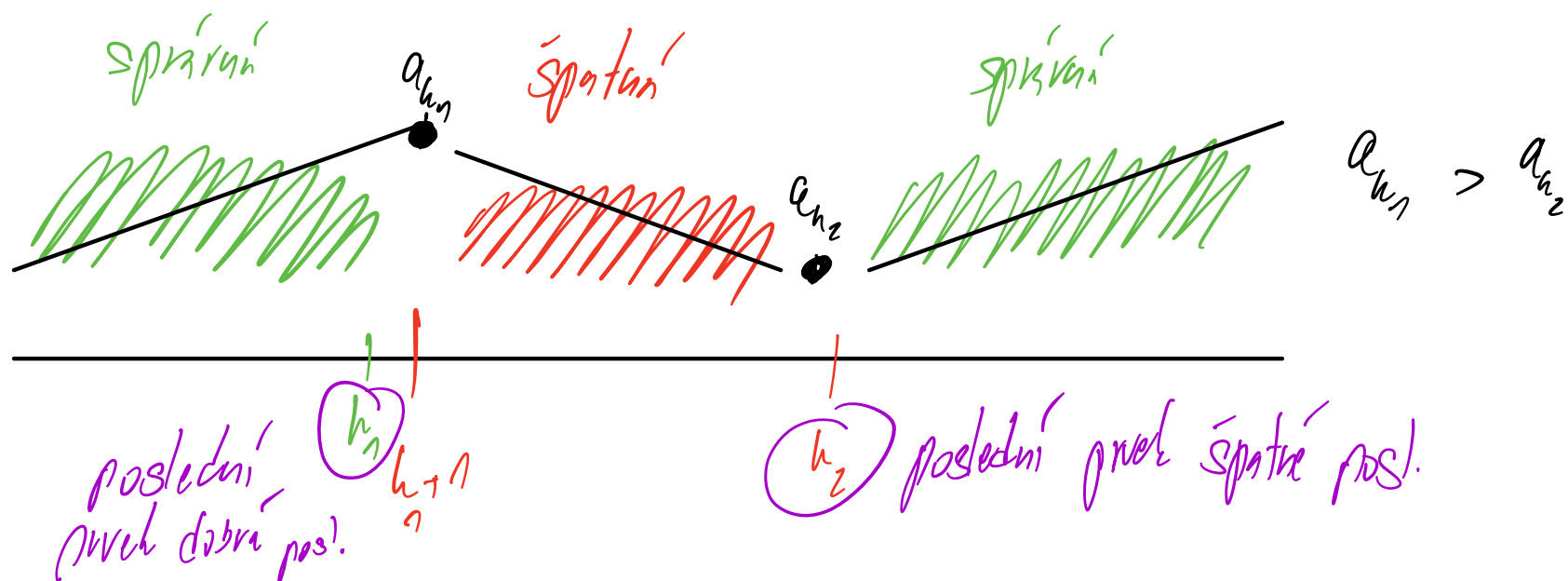
### Důkaz

Nechť  $(a_n) \subset \mathbb{R}$  je libovolná posloupnost. Řekneme, že v indexu  $k \in \mathbb{N}$  začíná *dobrá posloupnost*, existují-li takové indexy  $k = k_1 < k_2 < \dots$ , že  $a_{k_1} \leq a_{k_2} \leq \dots$ , a že v  $k$  začíná *špatná posloupnost*, existují-li takové indexy  $k = k_1 < k_2 < \dots < k_j$ , že  $a_{k_1} \leq a_{k_2} \leq \dots \leq a_{k_j} > a_n$  pro každé  $n > k_j$ . V prvním případě tedy členem  $a_k$  začíná nekonečná neklesající podposloupnost, a ve druhém taková konečná neklesající podposloupnost, že už ji nelze prodloužit.

Zřejmě v každém indexu  $k \in \mathbb{N}$  začíná dobrá posloupnost nebo v něm začíná špatná posloupnost. (Vystartujeme z  $k$  a libovolně budujeme neklesající podposloupnost. Když se nikdy nezastavíme, máme dobrou posloupnost, a když nastane krok, kdy už nemůžeme nijak pokračovat, máme špatnou posloupnost.)

# Monotónní podposloupnost - důkaz

Pokud v indexu 1 začíná dobrá posloupnost, jsme hotovi. Když ne, začíná v 1 špatná posloupnost a jako  $k_1 > 0$  definujeme její poslední index. Pokud v indexu  $k_1 + 1$  začíná dobrá posloupnost, jsme hotovi. Když ne, začíná v  $k_1 + 1$  špatná posloupnost a jako  $k_2 > k_1$  definujeme její poslední index. Takto pokračujeme dále. Pokud někdy dostaneme dobrou posloupnost, jsme hotovi, protože  $(a_n)$  má neklesající podposloupnost. Pokud ji nikdy nedostaneme a máme stále špatné posloupnosti, vezmeme jejich poslední indexy  $1 \leq k_1 < k_2 < \dots$ . Podle definice špatné posloupnosti tvoří klesající podposloupnost  $a_{k_1} > a_{k_2} > \dots$  a jsme zase hotovi. □



# Bolzanova–Weierstrassova věta

## Věta (Bolzanova–Weierstrassova)

Každá omezená posloupnost  $(a_n) \subset \mathbb{R}$  má konvergentní podposloupnost.

— musí mít monotónní podposloupnost, která musí mít vlastní limitu.  
↳ tedy že každá omezená má hromadný bod.

Neomezená má pak nevlastní  $\neq \infty$ , což bude také hromadný bod.

# Bolzanova–Weierstrassova věta

## Věta (Bolzanova–Weierstrassova)

*Každá omezená posloupnost  $(a_n) \subset \mathbb{R}$  má konvergentní podposloupnost.*

## Důkaz

Nechť  $(a_n) \subset \mathbb{R}$  je omezená. Podle předchozí věty má  $(a_n)$  monotónní podposloupnost  $(b_n)$ , jež je zjevně omezená. Podle Věty o limitě monotónní posloupnosti je  $(b_n)$  konvergentní.

$\Rightarrow$  každá omezená posloupnost hromadný bod (pro neomezenou posloupnost je to  $\infty$  nebo  $-\infty$ )

# Množina hromadných bodů

Označíme  $\mathbb{R}^* \supset H = \{\text{hromadné body posloupnosti } (a_n)\}$  .

$H$  má největší i nejmenší prvek:

- když  $(a_n)$  není shora omezená, pak je  $+\infty \in H$  největším prvkem
- je-li  $(a_n)$  shora omezená číslem  $c \in \mathbb{R}$ , je  $c$  horní závorou pro  $H$
- volme  $\alpha = \sup(H) \in \mathbb{R}$
- podle vlastnosti suprema a definice množiny  $H$  pro každé  $k \in \mathbb{N}$  má  $(a_n)$  podposloupnost s limitou v intervalu  $[\alpha - 1/k, \alpha]$ . Z těchto podposloupností pro  $k = 1, 2, \dots$  vybereme vhodné členy  $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots$ , že  $n_1 < n_2 < \dots$  a pro každé  $k$  je  $a_{n_k} \in [\alpha - 2/k, \alpha]$
- tím jsme vyrobili podposloupnost, jejíž limita je  $\alpha$ . Tedy  $\alpha = \sup(H) \in H$  a  $H$  má největší prvek.
- podobně pro nejmenší prvek

# Limes superior a limes inferior

## Definice (Limes superior a limes inferior.)

Definujeme

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \min(H) \quad \text{a} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \max(H) .$$

Tyto zkratky znamenají *limes inferior*, nejmenší limita (podposloupnosti), a *limes superior*, největší limita (podposloupnosti). Na rozdíl od limity  $\liminf$  a  $\limsup$  vždy existují.

Je-li  $p_n$   $n$ -té prvočíslo, co můžeme říct o  $\limsup_{n \rightarrow \infty} (p_{n+1} - p_n)$  a  $\liminf_{n \rightarrow \infty} (p_{n+1} - p_n)$ ? [www.menti.com](https://www.menti.com): 4892 7329 [► Kvíz](#)

# Řada a její součet

# Řada a její součet

## Definice (Řada a její součet)

*Nekonečná řada (reálných čísel)* je výraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots ,$$

kde  $(a_n)_{n \geq 1}$  je posloupnost reálných čísel.

*Částečný součet řady* ( $n$ -tý částečný součet)  $s_n$ , je součet jejích prvních  $n$  členů.

Pokud existuje vlastní limita posloupnosti  $(s_n)$  částečných součtů dané řady, mluvíme o *konvergentní řadě* a limita  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  je jejím *součtem*.

Pokud  $\lim s_n$  neexistuje nebo je nevlastní, je daná řada *divergentní*.

## Příklady řad

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

- je divergentní, protože  $(s_n) = (1, 0, 1, 0, 1, \dots)$

# Příklady řad

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

- je divergentní, protože  $(s_n) = (1, 0, 1, 0, 1, \dots)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$$

- *geometrická řada*
- $q \in \mathbb{R}$  je *kvocient*
- vzorec pro částečný součet ( $q \neq 1$ ):

$$s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

# Příklady řad

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

- je divergentní, protože  $(s_n) = (1, 0, 1, 0, 1, \dots)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$$

- *geometrická řada*
- $q \in \mathbb{R}$  je *kvocient*
- vzorec pro částečný součet ( $q \neq 1$ ):

$$s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \dots \quad -1 < q < 1 \end{cases}$$

# Příklady řad

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

- je divergentní, protože  $(s_n) = (1, 0, 1, 0, 1, \dots)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$$

- *geometrická řada*
- $q \in \mathbb{R}$  je *kvocient*
- vzorec pro částečný součet ( $q \neq 1$ ):

$$s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \dots \quad -1 < q < 1 \\ + \infty & \dots \quad q \geq 1 \end{cases}$$

# Příklady řad

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

- je divergentní, protože  $(s_n) = (1, 0, 1, 0, 1, \dots)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$$

- *geometrická řada*
- $q \in \mathbb{R}$  je *kvocient*
- vzorec pro částečný součet ( $q \neq 1$ ):

$$s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \dots & -1 < q < 1 \\ +\infty & \dots & q \geq 1 \\ \text{neexistuje} & \dots & q \leq -1. \end{cases}$$

# Nutná podmínka konvergence

## Věta

*Pokud řada  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konverguje, pak  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .*

Podmínka není postačující!

# Nutná podmínka konvergence

## Věta

*Pokud řada  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konverguje, pak  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .*

**Podmínka není postačující!**

## Důkaz

Když řada  $\sum a_n$  konverguje, pak  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S \in \mathbb{R}$ . Podle věty o aritmetice limit máme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = S - S = 0.$$

*posunutím indexu  
o 1 neměníme limitu*

# Příklady řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots, \text{ kde } s \in \mathbb{R}$$

Pro jejich konvergenci platí, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \begin{cases} \text{konverguje pro } s > 1 \\ \text{diverguje pro } s \leq 1. \end{cases}$$

Pro  $s = 1$  se řada nazývá *harmonická řada*.

Diverguje, ačkoli její prvky konvergují k nule!

# Příklady řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots, \text{ kde } s \in \mathbb{R}$$

Pro jejich konvergenci platí, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \begin{cases} \text{konverguje pro } s > 1 \\ \text{diverguje pro } s \leq 1. \end{cases}$$

Pro  $s = 1$  se řada nazývá *harmonická řada*.

Diverguje, ačkoli její prvky konvergují k nule!

Pro některé hodnoty  $s$  jsou pro součty této řady známy explicitní vzorce, například

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

# Srovnávací kritérium

## Věta (Srovnávací kritérium)

*Uvažujme řady  $\sum a_n$  a  $\sum b_n$  splňující  $0 \leq a_n \leq b_n$  pro všechna  $n$ .*

*Jestliže  $\sum b_n$  konverguje, pak také  $\sum a_n$  konverguje.*

*Jestliže  $\sum a_n$  diverguje, pak také  $\sum b_n$  diverguje.*

## Riemannova věta

$$\sum a_n \quad - \quad \lim a_n = 0$$

$$\sum a_{n_k} = \infty \quad - \quad a_{n_k} \text{ kladní členy}$$

$$\sum a_{n_2} = -\infty \quad - \quad a_{n_2} \text{ záporné členy}$$

$$\forall L \in \mathbb{R}^* \exists \pi(a_n): \sum \pi(a_n) = L$$