

# Matematická analýza 1 (NMAI054)

## 4. přednáška

Tereza Klimošová

[tereza@kam.mff.cuni.cz](mailto:tereza@kam.mff.cuni.cz)

10.března 2022

# Vlastnosti funkcí

## Definice

Řekneme, že funce  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $M \subseteq \mathbb{R}$  je

- *shora omezená* pokud existuje  $K \in \mathbb{R}$ , že  $f(x) < K$  pro každé  $x \in M$ ,
- *zdola omezená* pokud existuje  $K \in \mathbb{R}$ , že  $f(x) > K$  pro každé  $x \in M$ ,
- *omezená* pokud je shora i zdola omezená,
- *rostoucí* pokud  $f(x) < f(y)$  pro každé  $x, y \in M$  splňující  $x < y$ ,
- *neklesající* pokud  $f(x) \leq f(y)$  pro každé  $x, y \in M$  splňující  $x < y$ ,
- *klesající* pokud  $f(x) > f(y)$  pro každé  $x, y \in M$  splňující  $x < y$ ,
- *nerostoucí* pokud  $f(x) \geq f(y)$  pro každé  $x, y \in M$  splňující  $x < y$ ,
- *monotónní* pokud je neklesající nebo nerostoucí

Existují monotónní funkce neomezené shora i zdola:  $f(x) = x$ .

# Další vlastnosti funkcí

## Definice

- *periodická* funkce s periodou  $p \in \mathbb{R}, p > 0$ , když pro každé  $x \in M$  je i  $x \pm p \in M$  a  $f(x) = f(x \pm p)$ ,
- *prostá* pokud  $x \neq y$  implikuje  $f(x) \neq f(y)$ ,

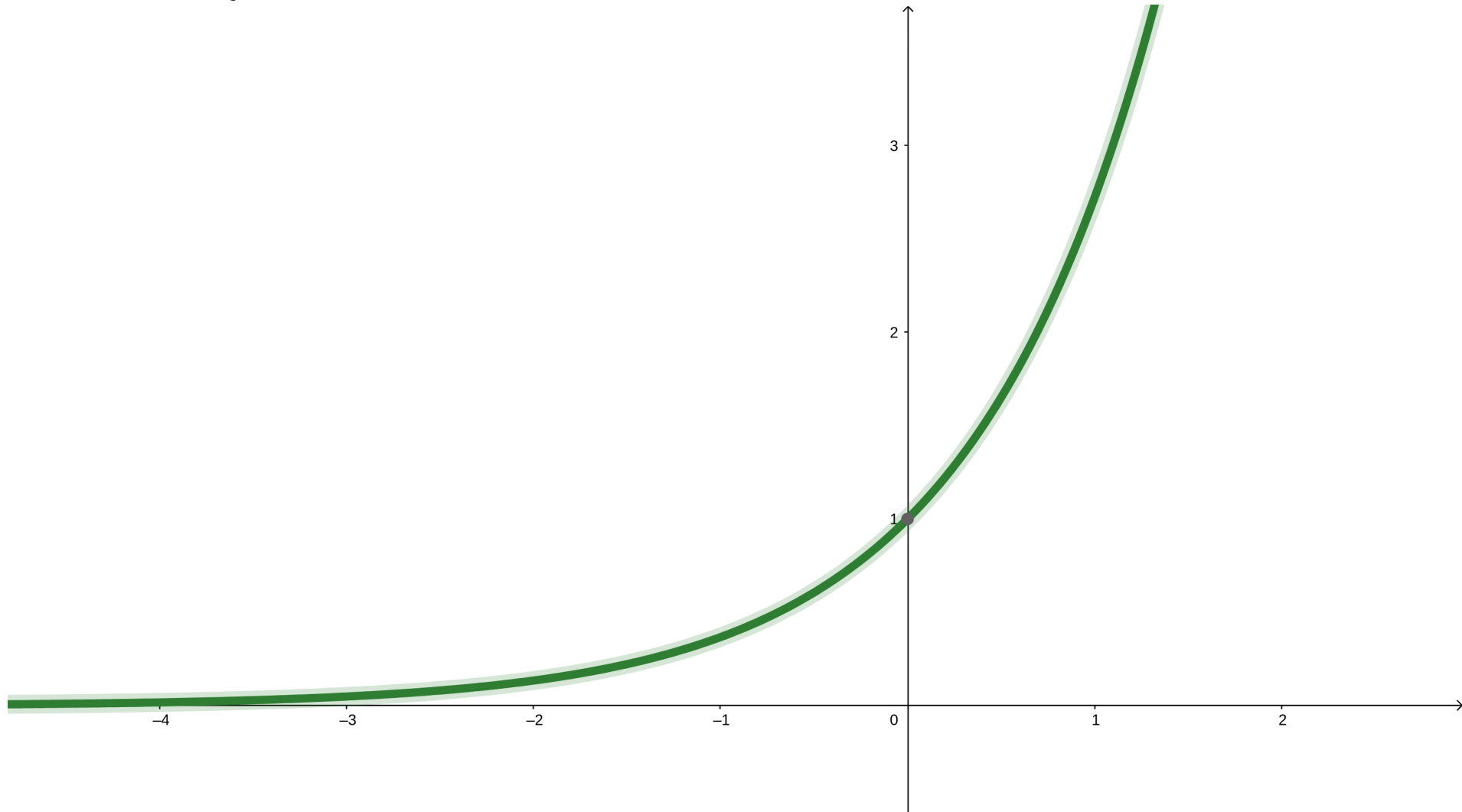
Musí být prostá funkce monotónní? [www.menti.com](https://www.menti.com): 1744 2689 [▶ Kvíz](#)

## Definice

Nechť  $f : M \rightarrow \mathbb{R}, M \subseteq \mathbb{R}$  je prostá funkce. Funkce  $f^{<-1>}$  je *inverzní funkce k funkci  $f$* , pokud  $f^{<-1>}(y) = x$  právě tehdy, když  $f(x) = y$ .

# Exponenciála

Jak definujeme  $2^\pi$ ?



# Exponenciála

## Definice

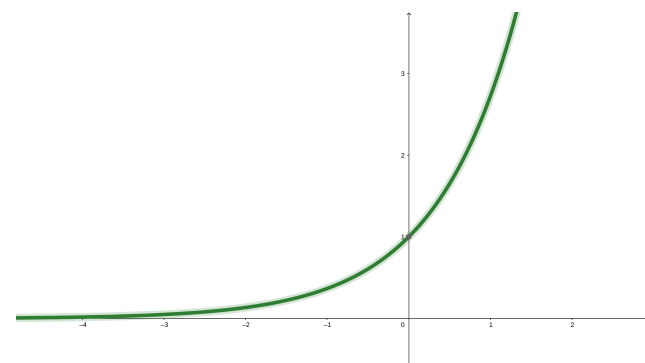
Pro libovolné  $x \in \mathbb{R}$  definujeme *exponenciální funkci* jako součet řady

$$e^x = \exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

- řada konverguje pro každé  $x \in \mathbb{R}$ , takže funkce je všude definovaná
- $e^0 = 1$
- $e^x > 1$  pro  $x > 0$
- *Eulerovo číslo*  $e$  definujeme jako  $\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \approx 2,7$
- $e$  je iracionální

Alternativně lze exponenciálu definovat jako limitu:

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$



# Vlastnosti exponenciály

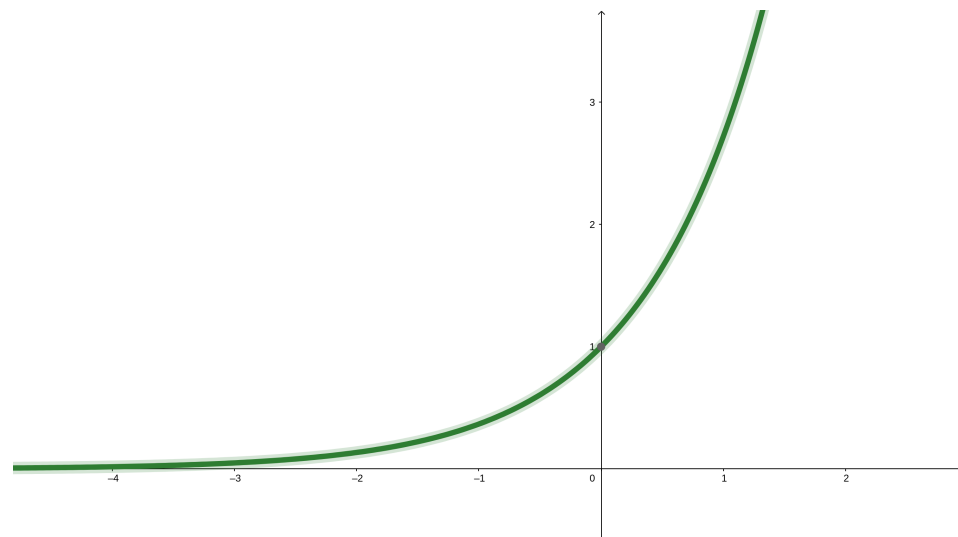
Věta (Funkce  $\exp$  převádí součet na součin)

Pro každé  $x, y \in \mathbb{R}$  je

$$\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y) .$$

⇒ následující vlastnosti exponenciální funkce:

- $\exp(-x) = 1 / \exp(x)$  (protože  $\exp(x) \exp(-x) = \exp(0) = 1$ ),
- $\exp(x) > 0$  pro každé  $x \in \mathbb{R}$ ,
- $\exp(x) < 1$  pro  $x < 0$ ,
- $\exp(x)$  je rostoucí funkce na  $\mathbb{R}$ , protože pokud  $x < y$ ,  
 $\exp(y) = \exp(x) \exp(y - x)$  a  $\exp(y - x) > 1$ ,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(n) = +\infty$ , a
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(-n) = 0$ .



# Logaritmus

## Věta (Logaritmus)

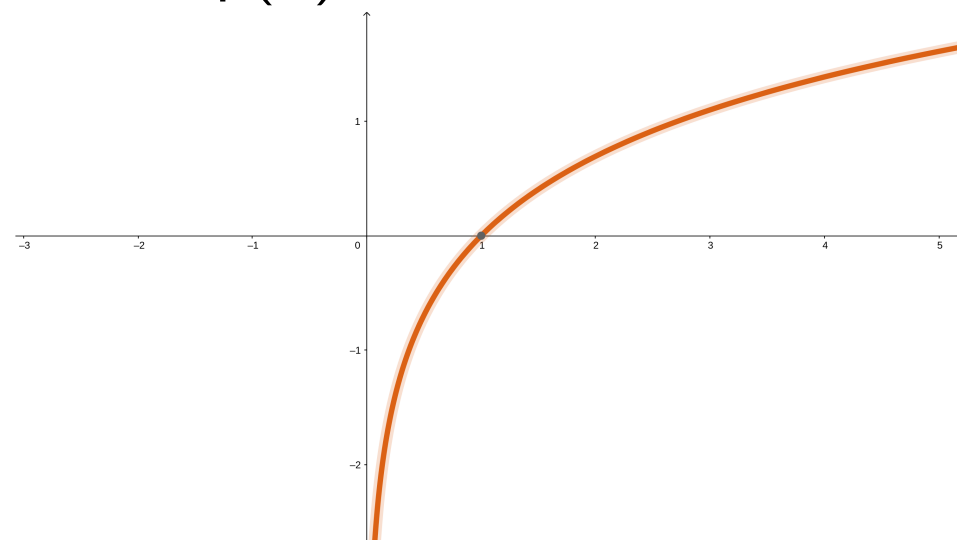
*Pro každé kladné  $y \in \mathbb{R}$  má rovnice*

$$e^x = y$$

*právě jedno řešení  $x \in \mathbb{R}$ , které označíme jako  $\ln y := x$ .*

*Nazýváme ho **přirozený logaritmus** čísla  $y$ .*

Přirozený logaritmus je tedy inverzní funkcí k  $\exp(x)$ .



# Různé základy exponenciály a logaritmu

## Definice

Pro kladné reálné číslo  $b$  a reálné číslo  $x$  definujeme  $b^x := \exp(x \ln b)$ . Pro kladné reálné číslo  $b \neq 1$ , definujeme *logaritmus o základu  $b$* , píšeme  $\log_b x$ , jako inverzní funkci k  $b^x$ .

Logaritmus o dané bázi lze z přirozeného logaritmu spočítat jako

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

# Goniometrické funkce

## Definice (Goniometrické funkce)

Funkce *sinus* a *cosinus* definujeme jako součet následujících řad

$$\sin x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

a

$$\cos x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

Funkce *tangens* a *cotangens* jsou definovány jako  $\tan x$  (nebo  $\operatorname{tg} x$ ) =  $\frac{\sin x}{\cos x}$  pro  $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$  a  $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$  pro  $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

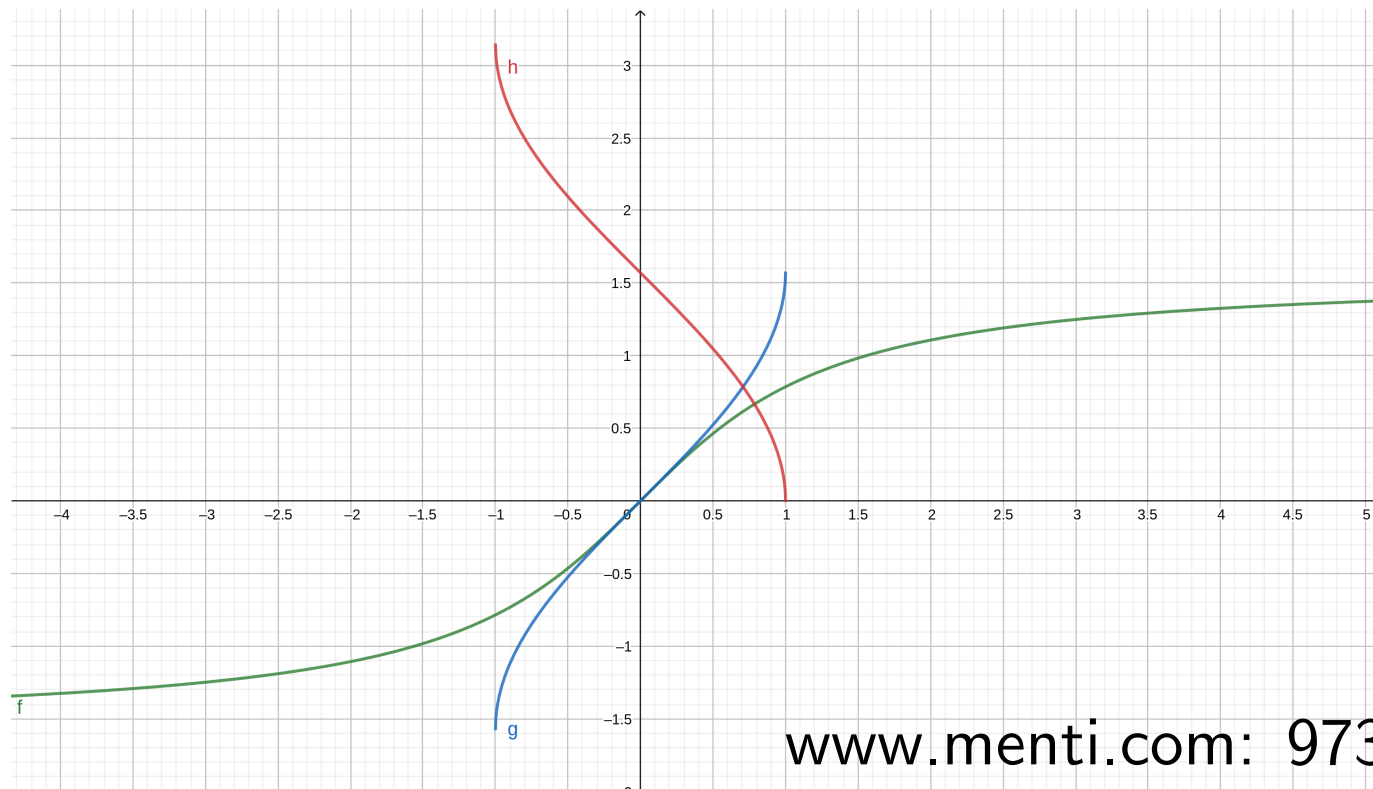
# Cyklometrické funkce

## Definice (Cyklometrické funkce)

Funkce *arkus sinus*  $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  je definována jako inverzní funkce k funkci sinus na intervalu  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

Funkce *arkus cosinus*  $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$  je definována jako inverzní funkce k funkci cosinus na intervalu  $[0, \pi]$ .

Funkce *arkus tangens*  $\arctan : (-\infty, \infty) \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$  je definována jako inverzní funkce k funkci tangens na intervalu  $(-\pi/2, \pi/2)$ .



# Okolí bodu

## Definice (Okolí bodu)

*Okolí ( $\delta$ -okolí) bodu*  $a \in \mathbb{R}$ , kde  $\delta \in \mathbb{R}^+$  je interval

$$U(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta\}.$$

Okolí nekonečen definujeme jako

$$U(+\infty, \delta) = (1/\delta, +\infty), \quad U(-\infty, \delta) = (-\infty, -1/\delta)$$

*Pravé okolí*, resp. *levé okolí*, bodu  $a \in \mathbb{R}$  je interval

$$U^+(a, \delta) = [a, a + \delta), \quad U^-(a, \delta) = (a - \delta, a]$$

*Prstencová okolí* bodu  $a \in \mathbb{R}$  jsou obyčejná okolí s vyjmutým bodem  $a$ :

$$P(a, \delta) = U(a, \delta) \setminus \{a\}$$

$$P^+(a, \delta) = U^+(a, \delta) \setminus \{a\}$$

$$P^-(a, \delta) = U^-(a, \delta) \setminus \{a\}$$

Prstencová okolí nekonečen jsou stejná jako jejich obyčejná okolí.

# Limita posloupnosti

## Definice (Vlastní limita)

Řekneme, že  $A \in \mathbb{R}$  je *(vlastní) limita* posloupnosti  $(a_n)$ , pokud pro každé reálné číslo  $\varepsilon > 0$  existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  takové, že pro každé přirozené číslo  $n \geq n_0$  je  $|a_n - A| < \varepsilon$ .

## Definice (Nevlastní limita)

Řekneme, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ , pokud pro každé reálné číslo  $K$  existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  takové, že pro každé přirozené číslo  $n \geq n_0$  je  $a_n > K$ . Řekneme, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$  pokud pro každé reálné číslo  $K$  existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  takové, že pro každé přirozené číslo  $n \geq n_0$  je  $a_n < K$ .

## Definice (Limita)

Řekneme, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ ,  $A \in \mathbb{R}^*$ , pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 > 0 : n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U(A, \varepsilon).$$

# Limita funkce

## Definition (Limita funkce)

Řekneme, že funkce  $f$  má v bodě  $a \in \mathbb{R}^*$  limitu  $A \in \mathbb{R}^*$ , když

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in P(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(A, \varepsilon).$$

Zapisujeme

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

Limita funkce  $f$  v bodě  $a$  **nezávisí** na její hodnotě v  $a$ ,  $f$  ani **nemusí být v  $a$  definovaná**.

## Příklady

Pokud  $f(x) = x$  a  $a \in \mathbb{R}$ , pak  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$ . Pokud změníme hodnotu funkce v nule a definujeme  $f$  jako

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \neq 0 \\ 1 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

pak stále  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$  pro každé  $a \in \mathbb{R}$ , i pro  $a = 0$ .

# Příklady

Funkce *signum* (znaménko), která je definovaná předpisem

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ -1 & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$

má limitu  $\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(a)$  pro  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , a  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(x)$  neexistuje.

# Jednostranné limity

## Definice (Jednostranné limity)

Funkce  $f(x)$  má v bodě  $a \in R$  *limitu zprava* rovnou  $A \in \mathbb{R}^*$ , zapisujeme

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A,$$

pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in P^+(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(A, \varepsilon).$$

Analogicky se definujeme *limitu zleva*,  $P^+(a, \delta)$  se nahradí levým prstencovým okolím  $P^-(a, \delta)$ .

Jestliže  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A$ , pak  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ . Naopak, pokud jsou limity zprava a zleva různé, limita neexistuje.

# Jednoznačnost limity funkce

## Věta (Jednoznačnost limity funkce)

*Funkce má v daném bodě nejvýše jednu limitu.*

## Důkaz

$A, B \in \mathbb{R}^*$  buďte dvě různé limity funkce  $f(x)$  v bodě  $a \in \mathbb{R}^*$ . Protože  $A \neq B$ , lze zvolit tak malé  $\varepsilon > 0$ , že  $U(A, \varepsilon) \cap U(B, \varepsilon) = \emptyset$ . Mají existovat  $\delta_1, \delta_2 > 0$  taková, že  $x \in P(a, \delta_1) \Rightarrow f(x) \in U(A, \varepsilon)$  a  $x \in P(a, \delta_2) \Rightarrow f(x) \in U(B, \varepsilon)$ . Pro  $0 < \delta < \min(\delta_1, \delta_2)$  máme, že  $x \in P(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(A, \varepsilon) \cap U(B, \varepsilon)$ . To je ale spor, tato dvě okolí jsou disjunktní a současně v jejich průniku má ležet nějaké  $f(x)$ . □

# Heineho definice limity

## Věta (Heineho definice limity)

*Nechť  $f$  je funkce definovaná na prstencovém okolí  $P(b, \Delta)$  bodu  $b \in \mathbb{R}^*$  pro nějaké  $\Delta > 0$ . Následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:*

- (i)  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = L$ ;*
- (ii) pro každou posloupnost  $(x_n) \subseteq P(b, \Delta)$ , pro níž platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ , platí také  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$ .*

# Heineho definice limity - použití

Funkce  $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ , která je definovaná na množině  $M = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , nemá limitu v nule.

Uvažme dvě posloupnosti  $(x_n)$  a  $(y_n)$ , kde

$$x_n = \frac{1}{\pi n} \quad \text{a} \quad y_n = \frac{1}{(2n + 1/2)\pi}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- $\lim x_n = \lim y_n = 0$ , ale
- $f(x_n) = \sin(1/x_n) = 0$  a  $f(y_n) = \sin(1/y_n) = 1$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$ .

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$  neexistuje

