

Matematická analýza 1 (NMAI054)

7. přednáška

Tereza Klimošová

tereza@kam.mff.cuni.cz

31.března 2022

Derivace

Definice

Nechť $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, $b \in M$ a $U(b, \delta) \subseteq M$ pro nějaké $\delta > 0$. *Derivace funkce f v bodě b* je limita

$$f'(b) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Derivace funkce f v bodě a zprava (zleva) je příslušná jednostranná limita pro $h \rightarrow 0^+$ ($h \rightarrow 0^-$), resp. $x \rightarrow a^+$ ($x \rightarrow a^-$). Tyto jednostranné derivace značíme $f'_+(a)$ a $f'_-(a)$.

Derivace buď

- existuje vlastní ($f'(b) \in \mathbb{R}$), nebo
- existuje nevlastní ($f'(b) = \pm\infty$), nebo
- neexistuje.

Derivace existuje $\Leftrightarrow$ obě jednostranné derivace existují a jsou si rovny.

Jestliže má f v bodě b **vlastní** derivaci, říkáme, že f je v b *diferencovatelná*.

Příklady

$$f(x) = 1 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-1}{h} = 0$$

Funkce $f(x) = x$ má derivaci rovnou 1 v každém bodě:

$$f'(b) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b+h-b}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

Funkce $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, má v b derivaci rovnou nb^{n-1} :

$$f'(b) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(b+h)^n - b^n}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cancel{b^n} + nb^{n-1}h + \binom{n}{2}b^{n-2}h^2 + \dots + \cancel{h^n}) - \cancel{b^n}}{h} = nb^{n-1}$$

Příklady: derivace a spojitost

- Funkce signum, $f(x) = \text{sgn}(x)$ v nule: www.menti.com: 97 11 02 7

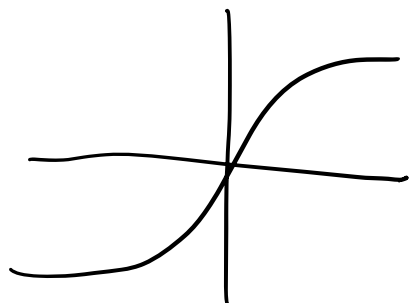
► Kvíz

„funkce“ v nule roste nekonečně rychle

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1-0}{h} = +\infty$$

tohle je nevlastní derivace

- Funkce absolutní hodnoty, $f(x) = |x|$, v nule nemá vůbec derivaci, protože $f'_-(0) = -1$ a $f'_+(0) = 1$.
- Funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná jako $f(x) = x^{1/3}$ pro $x \geq 0$ a jako $f(x) = -(-x)^{1/3}$ pro $x < 0$ je v 0 spojitá a má tam nevlastní derivaci $+\infty$.



derivace	spojitá	nespojité
neexistuje	✓ <i>abs</i>	✓
vlastní	✓	✗
nevlastní	✓ <i>∛x</i>	✓ <i>sgn</i>

Diferencovatelnost a spojitost

Věta (Diferencovatelnost $\Rightarrow$ spojitost)

Má-li $f: U(b, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě b vlastní derivaci, je v b spojitá.

► Důkaz

Chceme: $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = f(b)$, zkusíme $\lim_{x \rightarrow b} f(x) - f(b)$ $\checkmark$ $\rightarrow$ pat by platila rovnost, co chceme

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) - f(b) = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \cdot (x - b) \stackrel{AL}{=} \lim_{x \rightarrow b} \underbrace{\frac{f(x) - f(b)}{x - b}}_{f'(b) \in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow b} x - b}_{= 0} = 0$$

Proč! je nutný, takže platí vztah výše

Aritmetika derivací

Věta (Aritmetika derivací)

Nechť $f, g: U(b, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ jsou funkce, které mají v bodě b derivaci (vlastní či nevlastní). Pak

- (i) Platí, že $(f + g)'(b) = f'(b) + g'(b)$, je-li pravá strana definovaná.*
- (ii) Pro $\alpha \in \mathbb{R}$ platí $(\alpha f)'(b) = \alpha(f'(b))$, je-li pravá strana definovaná.*
- (iii) Platí Leibnizova formule: $(fg)'(b) = f'(b)g(b) + f(b)g'(b)$, je-li pravá strana definovaná a f nebo g je spojitá v b .*
- (iv) Je-li g spojitá v b , $g(b) \neq 0$ a je-li pravá strana následující rovnosti definovaná, pak*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(b) = \frac{f'(b)g(b) - f(b)g'(b)}{g(b)^2}.$$

Důkaz Leibnizovy formule

► Důkaz

Chceme spočítat $(f \cdot g)'(b)$

$$(f \cdot g)'(b) = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(b) \cdot g(b)}{x - b} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{g(x) \cdot (f(x) - f(b)) + f(b) \cdot (g(x) - g(b))}{x - b}$$

$$\stackrel{AL}{=} \left(\lim_{x \rightarrow b} g(x) \right) \cdot f'(b) + f(b) \cdot g'(b)$$

↑
 g je spojitá $\Rightarrow g(b)$

Odstrašující příklady

$f(x) = \text{sgn}(x)$ a $g(x) = 0$:

$$(fg)'(0) \stackrel{??}{=} + \infty \cdot 0 + 0 \cdot 0$$

jen vyjde poučit AL.

$$= 0$$

$f(x) = g(x) = \frac{1}{10} + \text{sgn}(x)$:

$$(fg)'(0) \stackrel{??}{=} + \infty \cdot \frac{1}{10} + \infty \cdot \frac{1}{10} = + \infty$$

chybí spojitost $g(x)$

Nemá derivace, protože nemá jednostranné derivace stejné.

Derivace známých funkcí

Derivováním mocninných řad lze odvodit:

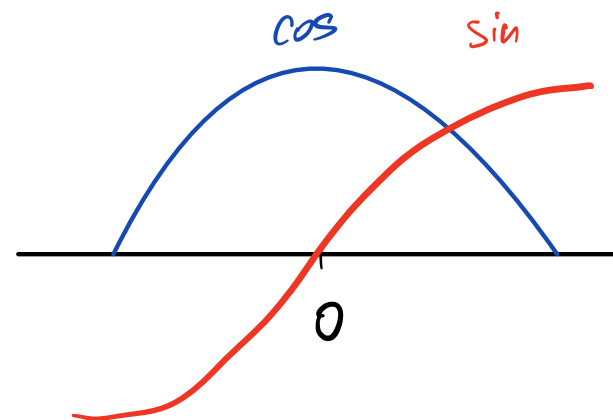
$$\exp'(x) = \exp(x)$$

$$\sin'(x) = \cos(x)$$

$$\cos'(x) = -\sin(x)$$

Derivace odpovídá rychlosti růstu funkce

Ukazuje, jak rychle roste



Derivace složené funkce

Věta (Derivace složené funkce)

Nechť funkce f má derivaci v bodě b , funkce g má derivaci v bodě a , $b = g(a)$ a g je spojitá v a . Pak

$$(f \circ g)'(a) = f'(b) \cdot g'(a),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

► Důkaz

$$g'(a) \neq 0$$

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \neq 0 \text{ na okolí } a$$

$$g(x) \neq g(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{g(x) - g(a)} = g'(a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)}$$

$f'(h)$ dle VOLSF

$$\lim_{x \rightarrow a} H(g(x))$$

Důkaz

$$H(y) = \frac{f(y) - f(b)}{y - b}$$

$$g'(a) = 0 \Rightarrow f'(b) \text{ vlastní} \Rightarrow f \text{ je spojitá}$$

Aby šlo počítat VolSF, potřebujeme H spojitě

Místo H použijeme spojitou $\tilde{H}$

$$\tilde{H} \sim \begin{cases} H(y): y \neq b \\ f'(b): y = b \end{cases}$$

Důkaz

Derivace a sudost/lichost

P: f je lichá

Q: f' je sudá

Která implikace mezi P a Q platí? [www.menti.com 1210 8424](https://www.menti.com/12108424) [▶ Kvíz](#)

$$f(x) = -f(-x) \quad -$$

$$g(x) = -f(-x)$$

Derivace inverzní funkce

Věta (Derivace inverzní funkce)

Nechť $J \subseteq \mathbb{R}$ je interval, $a \in J$ jeho vnitřní bod, $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a ryze monotónní funkce (tj. rostoucí nebo klesající) a $f(a) = b$. Pak

- (i) *Když má f v a nenulovou derivaci $f'(a)$, potom inverzní funkce $f^{<-1>}$ má v b derivaci*

$$(f^{<-1>})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

- (ii) *Když $f'(a) = 0$ a f je rostoucí (resp. klesající), potom $(f^{<-1>})'(b) = +\infty$ (resp. $-\infty$).*

► Důkaz

Důkaz

Derivace logaritmu

$$b = \exp(a)$$

$$\ln'(b) = \frac{1}{\exp'(a)} = \frac{1}{\exp(a)} = \frac{1}{x}$$