

$$f'(a) := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Matematická analýza 1 (NMAI054)

8. přednáška

Tereza Klimošová

tereza@kam.mff.cuni.cz

7.dubna 2022

Derivace inverzní funkce

Věta (Derivace inverzní funkce)

Nechť $J \subseteq \mathbb{R}$ je interval, $a \in J$ jeho vnitřní bod, $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a ryze monotónní funkce (tj. rostoucí nebo klesající) a $f(a) = b$. Pak

(i) Když má f v a nenulovou derivaci $f'(a)$, potom inverzní funkce $f^{<-1>}$ má v b derivaci

$$(f^{<-1>})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

(ii) Když $f'(a) = 0$ a f je rostoucí (resp. klesající), potom $(f^{<-1>})'(b) = +\infty$ (resp. $-\infty$).

► Důkaz

f rostoucí : $G(x) = \frac{x-a}{f(x)-f(a)} \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$

$y \neq b \quad G(f^{<-1>}(y)) = \frac{f^{<-1>}(y) - f^{<-1>}(b)}{y - b}$

Důkaz

$$f^{-1}(b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{y \rightarrow b} G(f^{-1}(y)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

→ díky monotónii platí druhá podmínka
ROLSF

$$f'(a) \neq 0$$

$$\frac{1}{f'(a)}$$

$$f'(a) = 0$$

automatičen
nemohou
pauzovat

$$+ \infty$$

$$\frac{1}{1}$$

něco nekončej se
blíží k nule, takže to jde
k nekonečnu.

l'Hospitalovo [lopitalovo] pravidlo *Aplíkee derivace!*

nástroj pro výpočet limit neurčitých výrazů $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$

Věta (l'Hospitalovo pravidlo)

Nechť $a \in \mathbb{R}^$, nechť funkce $f, g: P(a, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ mají na $P(a, \delta)$ vlastní derivaci a nechť $g'(x) \neq 0$ na $P(a, \delta)$.*

- 1 Pokud $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ a $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)/g'(x) = A \in \mathbb{R}^*$, pak i $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = A$.*
- 2 Pokud $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty$ a $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)/g'(x) = A \in \mathbb{R}^*$, pak i $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = A$.*

Totéž platí pro jednostranné limity $x \rightarrow a^-$ a $x \rightarrow a^+$.

Správné použití

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Chybné použití

nesplňují podmínky L'H

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 1}{3x + 1} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x + 1)'}{(3x + 1)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

musí to $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$

Chybné použití $\frac{\infty}{\infty}$ ✓

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2)'}{(x + \sin x)'} \neq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{1 + \cos x}$$

tedy limita neexistuje.

musí existovat limita podílů těch dvou derivací

což tady neexistuje

$$= +\infty \quad \frac{x^2}{x+1} \leq \frac{x^2}{x+\sin x}$$

↓
+∞

Beznadějné použití

– Není tedy žádný špatný trik, jen se ta LH prostě nehodí.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\exp(-1/x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\exp(-1/x))'}{(x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\exp(-1/x)/x^2}{1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\exp(-1/x)}{x^2} = \dots\end{aligned}$$

$$y = \frac{1}{x} \quad f(y) = \frac{y}{\exp(y)} \quad \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{\exp(y)} = 0$$

Nutná podmínka pro lokální extrém

Věta (Nutná podmínka pro lokální extrém)

Nechť má $f: U(a, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě a nenulovou derivaci $f'(a) \neq 0$. Potom f nenabývá v a lokální extrém. (T.j. pro každé δ_1 , $0 < \delta_1 < \delta$, existují body $b, c \in P(a, \delta_1)$ takové, že $f(b) < f(a) < f(c)$.)

$\Rightarrow$ pokud funkce f **má** lokální extrém v bodě a

- $f'(a) = 0$, nebo
- $f'(a)$ neexistuje

Opačná implikace ale neplatí – **nulová, nebo neexistující derivace lokální extrém neimplikuje!**

Globální extrém musí být lokálním extrémem, ale **pozor na krajní body!**

$f'(a) > 0$, tedy na $P(a, \delta_2)$ pro $\delta_2 > 0$ platí: $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0 \Rightarrow$

► Důkaz

$x \in P^-(a, \delta_2)$ $x - a < 0 \Rightarrow f(x) < f(a)$

pak a není l. min

$x \in P^+(a, \delta_2)$ $x - a > 0 \Rightarrow f(x) > f(a)$

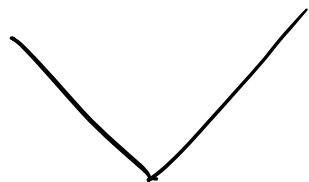
□

pak a není l. max

Důkaz

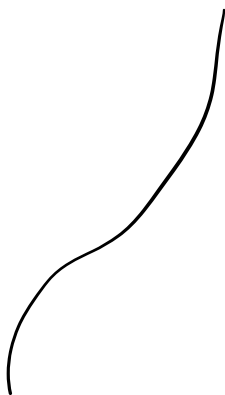
Příklady

$$f(x) = |x|$$



min v 0, není derivace v 0

$$f(x) = x^3$$



$$(x^3)' = 3x^2 \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{má nulovou derivaci} \\ \rightarrow \text{v nule není žádný extrém} \end{array}$$

$$f(x) = x^2$$

na $[-1, 1]$

minimum v 0 $f'(0) = 0$

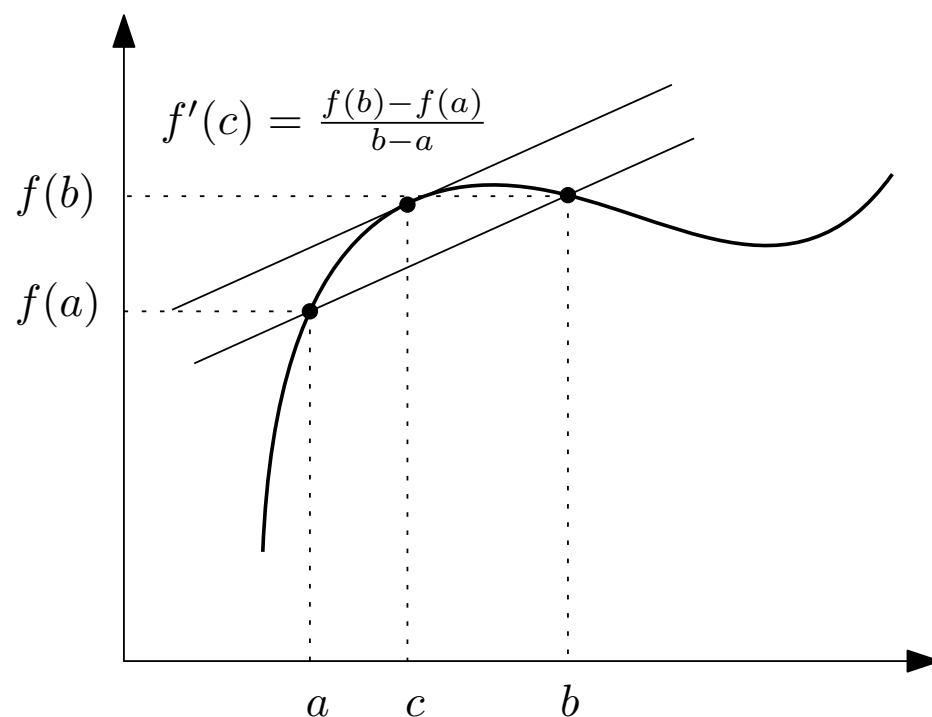
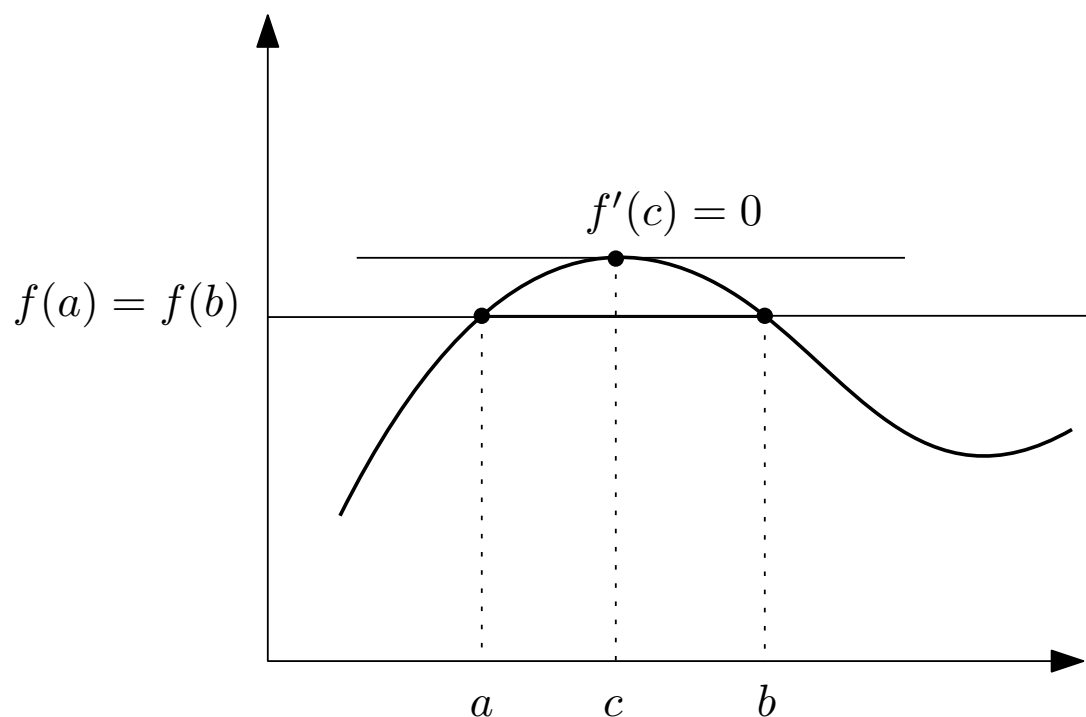
maximum v -1, 1

minimum v 0

→ díky uzavřenému intervalu existuje lokální extrém. Jinak x^2 roste daleko dále

Věty o střední hodnotě

"Existuje bod c , kde je tečna grafu rovnoběžná se zadanou sečnou."

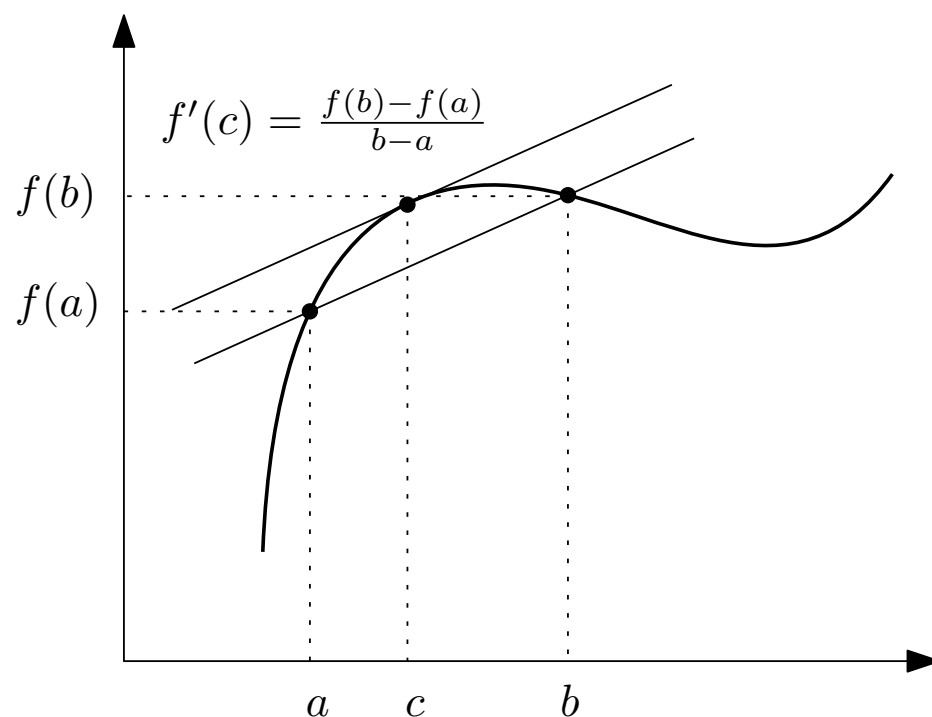
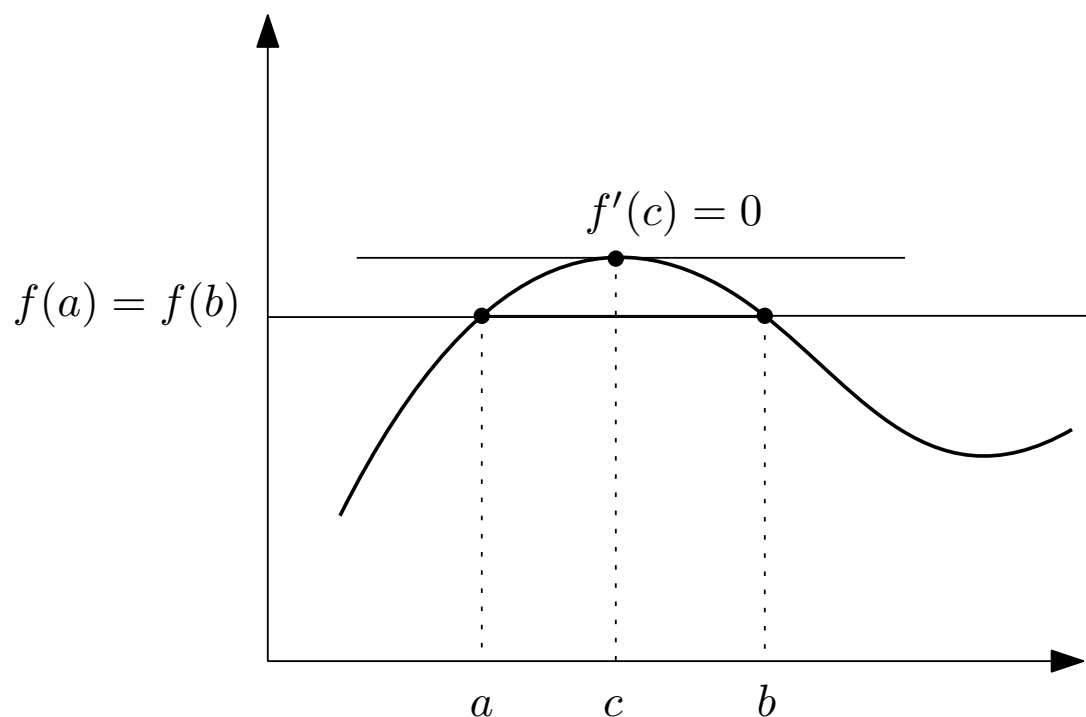


Věta (Rolleova věta)

Nechť $-\infty < a < b < +\infty$ a funkce $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je na $[a, b]$ spojitá, má na intervalu (a, b) derivaci (i nevlastní) a $f(a) = f(b)$. Potom existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f'(c) = 0$.

Věty o střední hodnotě

"Existuje bod c , kde je tečna grafu rovnoběžná se zadanou sečnou."



Věta (Lagrangeova věta o střední hodnotě)

Nechť $-\infty < a < b < +\infty$ a funkce $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je na $[a, b]$ spojitá a má na intervalu (a, b) derivaci (i nevlastní). Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Důkaz Rolleovy věty

Věta (Rolleova věta)

Nechť $-\infty < a < b < +\infty$ a funkce $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je na $[a, b]$ spojitá, má na intervalu (a, b) derivaci (i nevlastní) a $f(a) = f(b)$. Potom existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f'(c) = 0$.

► Důkaz

f konstantní

→ pak má nulovou derivaci ve všech vlastních bodech

f ! konstantní: $\exists d: f(d) > f(a)$

Princip maximum

– máme uzavřený omezený interval.

f má máx. $[a, b]$

v bodě c , kdy $c \neq a \neq b$, protože

$f(c) \geq f(d) > f(a)$

– tedy je uvnitř intervalu

– a tam vždy existuje derivace

→ Pak z podmínek pro lok. max:

X – derivace neexistuje

✓ – $f'(c) = 0$



Důkaz Lagrangeovy věty

Věta (Lagrangeova věta o střední hodnotě)

Nechť $-\infty < a < b < +\infty$ a funkce $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je na $[a, b]$ spojitá a má na intervalu (a, b) derivaci (i nevlastní). Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

► Důkaz

$$p(x) = f(a) + (x-a) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \quad \rightarrow \text{rovnice seciny}$$

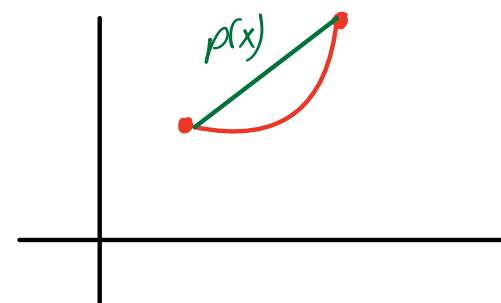
$$h(x) = f(x) - p(x) \quad \begin{array}{l} \text{— dase bude spojitá} \\ \text{— dase má derivaci v celém intervalu} \end{array}$$

$$h'(x) = f'(x) + p'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

$$h(a) = 0 = h(b)$$

$\Rightarrow$ Použijeme Rolleovu větu na $h \rightarrow c \quad h'(c) = 0$

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$



Derivace a monotonie

Věta

Nechť $J \subseteq \mathbb{R}$ je nedegenerovaný interval (s kladnou délkou), funkce $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ je na J spojitá a má v každém vnitřním bodě intervalu J derivaci. Pokud na vnitřku J platí $f' > 0$ (resp. $f' \geq 0$), je f na J rostoucí (resp. neklesající). Pokud na vnitřku J platí $f' < 0$ (resp. $f' \leq 0$), je f na J klesající (resp. nerostoucí).

⇒ Má-li f nulovou derivaci v každém vnitřním bodě intervalu J , je na J současně nerostoucí a neklesající, tedy konstantní.

► Důkaz

$$f'(x) > 0: a < b, a, b \in J \quad \text{chceme} \quad f(a) < f(b)$$

=

$$f(b) > f(a)$$

$$\hookrightarrow \text{Lagrange: } \exists c \in (a, b): f(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{Jelikož } f'(c) > 0: \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$$

Důkaz

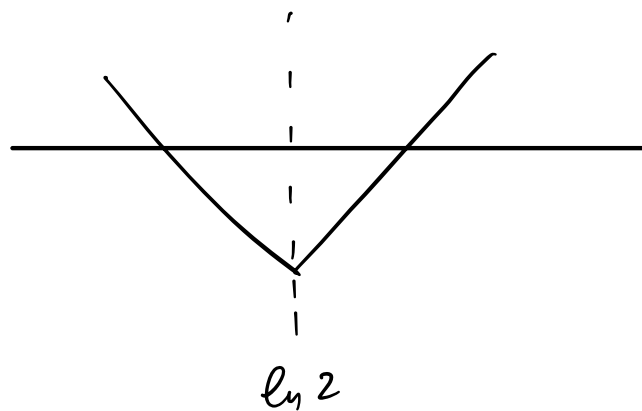
Počet řešení

Kolik různých řešení má rovnice $e^x - 2x = 2$? [www.menti.com 3409 4277](https://www.menti.com/34094277)

► Kvíz

$$(e^x - 2x - 2)' = e^x - 2 \quad \begin{cases} > 0 & (\ln 2, +\infty) \\ < 0 & (-\infty, \ln 2) \end{cases}$$

Monotonie:



Derivace vyšších řádů

Definice

Pokud funkce $f: U(a, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ má na $U(a, \delta)$ vlastní derivaci $f'(x)$ a existuje limita

$$f''(a) := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a},$$

nazveme ji *druhou derivací* f v a . Analogicky definujeme derivace vyšších řádů: Má-li $f: U(a, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ na $U(a, \delta)$ derivaci $f^{(n-1)}(x)$ řádu $n - 1$, *derivace řádu n v a* je limita

$$f^{(n)}(a) := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x - a},$$

když existuje.

Příklad

$$f(x) = x^2 - x$$

$$f'(x) = 2x - 1$$

$$f''(x) = 2$$

Konvexita a konkávnost

Definice

Nechť I je interval. Řekneme, že funkce $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je na intervalu I

- *konvexní*, pokud pro každá $a, x, b \in I$ taková, že $a < x < b$, platí

$$f(x) \leq f(a) + (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

- *ryze konvexní*, pokud je předchozí nerovnost ostrá,
- *konkávní*, pokud pro každá $a, x, b \in I$ taková, že $a < x < b$, platí

$$f(x) \geq f(a) + (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

- *ryze konkávní*, pokud je předchozí nerovnost ostrá.

Výraz na pravé straně = je rovnice přímky procházející body $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$.

- konvexní funkce: graf funkce f na intervalu (a, b) pod úsečkou spojující body $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$
- konkávní funkce: graf leží nad touto úsečkou.

Příklady

$$f(x) = \alpha x$$

$$f(x) = |x|$$

[www.menti.com 4542 3959](https://www.menti.com/join/45423959)

► Kvíz

Konvexita, konkavita a druhá derivace

Věta

Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je otevřený interval, nechť funkce $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ má na I druhou derivaci $f''(x)$. Pokud je f'' na I kladná (resp. nezáporná), je f na I ryze konvexní (resp. konvexní). Pokud je f'' na I záporná (resp. nekladná), je f na I ryze konkávní (resp. konkávní).

Funkce může být konvexní (nebo konkávní), i když druhou derivaci v některých bodech nemá!

Spojitosť derivace v krajním bodě

Věta

Nechť $I = [a, b)$ je interval, nechť funkce $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá zprava v bodě a a nechť má na (a, b) vlastní derivaci, pro níž platí $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = A \in \mathbb{R}^$. Potom má f v bodě a derivaci zprava, pro níž platí*

$$f'_+(a) = A.$$

f musí být spojitá zprava v a !