

Matematická analýza 1 (NMAI054)

9. přednáška

Tereza Klimošová

tereza@kam.mff.cuni.cz

14.dubna 2022

Konvexita a konkávnost

Definice

Nechť I je interval. Řekneme, že funkce $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je na intervalu I

- *konvexní*, pokud pro každá $a, x, b \in I$ taková, že $a < x < b$, platí

$$f(x) \leq f(a) + (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

rovnice sečny

- *ryze konvexní*, pokud je předchozí nerovnost ostrá, $\rightarrow$



- *konkávní*, pokud pro každá $a, x, b \in I$ taková, že $a < x < b$, platí

$$f(x) \geq f(a) + (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

- *ryze konkávní*, pokud je předchozí nerovnost ostrá.

$f(x) = |x|$ [www.mentimeter.com 4542 3959](https://www.menti.com/45423959) [▶ Kvíz](#)

je konvexní

Konvexita, konkavita a druhá derivace *pro netriviální funkce*

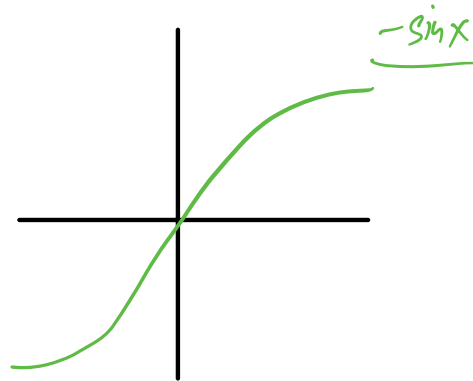
– funkce ale musí svou druhou derivaci

Věta

Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je otevřený interval, nechť funkce $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ má na I druhou derivaci $f''(x)$. Pokud je f'' na I kladná (resp. nezáporná), je f na I ryze konvexní (resp. konvexní). Pokud je f'' na I záporná (resp. nekladná), je f na I ryze konkávní (resp. konkávní).

Funkce může být konvexní (nebo konkávní), i když druhou derivaci v některých bodech nemá!

$$(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x$$



Spojitosť derivace v krajním bodě

Věta

Nechť $I = [a, b)$ je interval, nechť funkce $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá zprava v bodě a a nechť má na (a, b) vlastní derivaci, pro níž platí $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = A \in \mathbb{R}^*$. Potom má f v bodě a derivaci zprava, pro níž platí

$$f'_+(a) = A.$$

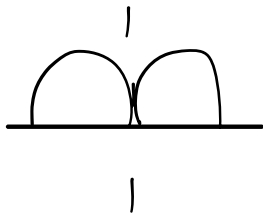
f musí být spojitá zprava v a !

$$+\infty = \operatorname{sgn}'_+(0) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn}'(x) = 0$$

X

↖ v bodě a není spojitá zprava (pří. zlevo)

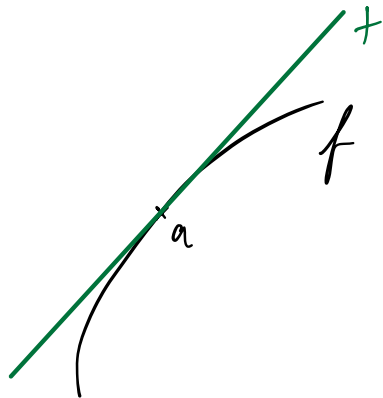
$$(\sin x)'_+(0)$$



↗ derivace zprava je rovna 1

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin' x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1$$

Aproximace funkce



$$t(a) = f(a)$$

→ nejmenší rozdíl

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) - t(x) = 0$$

- každá přímka procházející tím bodem by tečnou byla

- potřebujeme tedy lepší/více podmínek

$$f(x) - t(x) \leq |x - a| \rightarrow \text{lepší, ale nemáme, jestli takto umíme dosáhnout}$$

$$f(x) - t(x) = o(|x - a|)$$

→ rozdíl klesá rychleji než vzdálenost od bodu $x - a$

Aproximace funkce

Derivace = nejlepší aproximace lineární funkcí

$$t(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$

- rovnice tečny grafu f v a
- jediný polynom stupně ≤ 1 splňující

$$f(x) - t(x) = o(|x-a|)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - t(x)}{x - a} = 0$$

Aproximace pomocí polynomů vyššího stupně

Pro funkci f s vlastní n -tou derivací v a existuje právě jeden polynom $P(x)$ stupně $\leq n$, pro který

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

Taylorův polynom

Definice (Taylorův polynom)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, nechť $n \in \mathbb{N}_0$ a nechť f je funkce definovaná na okolí a , která má v a vlastní n -tou derivaci $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. Pokud $n = 0$, předpokládejme i spojitost f v a . *Taylorovým polynomem řádu n funkce f v bodě a rozumíme polynom*

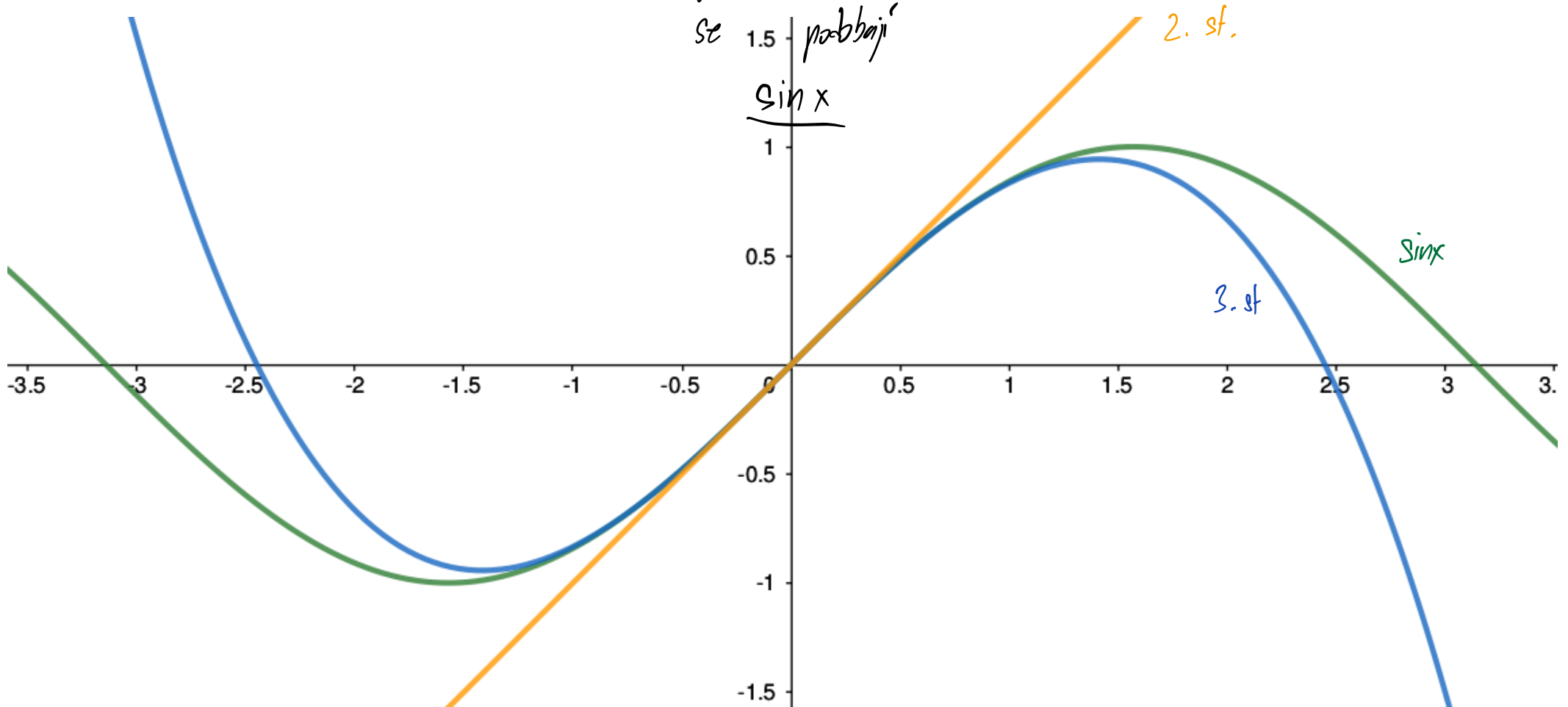
$$(x-a)^0 = 1 \quad ; \quad \text{pro } x=a$$

$$T_n^{f,a}(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i \quad f^{(0)} = f \quad \text{tzn. že nultá derivace je funkce samotná}$$
$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

- 0^0 je obecně nedefinovaný výraz
- v kontextu polynomů či mocninných řad: $(x-a)^0$ interpretujeme jako konstantní funkci rovnou 1 pro všechna x
- $f^{(0)} := f$, t.j., f je svou vlastní „nultou derivací“

Aproximace funkce $\sin x$ na okolí nuly polynomem prvního a třetího stupně

Důležité je, že na okolí nuly
se přibližují



Taylorův polynom

Označme

$$T(x) = T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Platí

- $T(a) = f(a)$

→ (všechny $(x-a)$ budou rovný nule)

- $T'(a) = f'(a)$

- obecně $T^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \ (k \leq n)$

Taylorův polynom funkce f n téhož stupně v bodě a .

Pro $n \geq 1$ platí

$$(T_n^{f,a})' = T_{n-1}^{f',a}$$

(pro $n = 1$ je nutno předpokládat spojitost f' v a).

Charakterizace Taylorova polynomu

Věta (Charakterizace Taylorova polynomu)

Nechť funkce f má Taylorův polynom řádu $n \in \mathbb{N}_0$ v bodě $a \in \mathbb{R}$. Potom $T(x) = T_n^{f,a}(x)$ je jediný polynom stupně nejvýše n s vlastností

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

Ekvivalentně $f(x) = T(x) + o(|x - a|^n)$ pro $x \rightarrow a$.

→ tohle je ta limita výše

Co platí pro Taylorův polynom funkce $g(x) = f(2x)$?

www.menti.com 28 07 71 6 ▶ Kvíz

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - T(2x)}{(2x - a)^n} = 0 \quad \rightarrow \text{podle VOLSF} \quad = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - T(2x)}{2^n (x - \frac{a}{2})^n} \stackrel{AL}{=} \frac{1}{2^n} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - T(2x)}{(x - \frac{a}{2})^n}$$

→
Tohle je užáček, protože g má v bodě $a/2$ T stupně n rovný $T(2x)$

Charakterizace Taylorova polynomu

Věta (Charakterizace Taylorova polynomu)

Nechť funkce f má Taylorův polynom řádu $n \in \mathbb{N}_0$ v bodě $a \in \mathbb{R}$. Potom $T(x) = T_n^{f,a}(x)$ je jediný polynom stupně nejvýše n s vlastností

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

Ekvivalentně $f(x) = T(x) + o(|x - a|^n)$ pro $x \rightarrow a$.

Lemma

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a Q je polynom stupně nejvýše n takový, že

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{Q(x)}{(x - a)^n} = 0.$$

Pak je Q identicky nulový polynom.

Důkaz lemmatu Indukcí podle n :

$$n = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{konst.}}{1} = 0 \Rightarrow \text{konst} = 0$$

$$n \geq 1:$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0$$

tahle jde k nule $\Rightarrow$ pak $\lim_{x \rightarrow a} Q(x) = 0$ — protože je spojitý
 $= Q(a) = 0 \Rightarrow$ polynom v a má kořen

$\Rightarrow Q(x) = (x-a) \cdot R(x)$, kde $R(x)$ je polynom stupně nejvýše $n-1$.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a) \cdot R(x)}{(x-a) \cdot (x-a)^{n-1}} = 0 \quad \text{z IP pro } n-1 \Leftrightarrow R(x) = 0$$

$$\frac{R(x)}{(x-a)^{n-1}}$$

je polynom s
nižším stupněm,
tedy splňuje IP.

Důkaz věty

Nechť funkce f má Taylorův polynom řádu $n \in \mathbb{N}_0$ v bodě $a \in \mathbb{R}$. Potom $T(x) = T_n^{f,a}(x)$ je jediný polynom stupně nejvýše n s vlastností

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T(x)}{(x - a)^n} = 0. \quad *$$

Části důkazu:

1) splňuje *

2) * je jedinou rovnici

► Důkaz

① $T(x)$ splňuje * indukcí.

$$n=0: \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^0} = \frac{f(x) - f(a)}{1} = 0 \quad \checkmark \text{ ze spojitosti } f \text{ v bodě } a$$

$$\begin{aligned} n=1: \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a) \cdot (x-a)}{(x-a)} & \stackrel{AL}{=} \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \right) - f'(a) \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{x-a} \right) = \\ & = f'(a) - f'(a) = 0 \end{aligned}$$

Důkaz věty

$n > 1$: s využitím L'H:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f',a}(x)}{n \cdot (x-a)^{n-1}} \stackrel{\text{AL}}{=} \frac{1}{n} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f',a}(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0$$

L'H jde použít, protože $\frac{0}{0}$

dle IP pro f' a $n-1$

② Jediněnost * spor: se stupněm nejvýše n

Nechť existují dva polynomy T a $\check{T}$ splývající rovnost *. $T \neq \check{T}$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{T(x) - \check{T}(x)}{(x-a)^n} \stackrel{\text{AL}}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{T(x) - f(x)}{(x-a)^n} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - \check{T}(x)}{(x-a)^n}$$

$= 0$ podle *

$= 0$ podle *

na jedné straně jsem přičetl,
na druhé jsem odečetl.

Podle lemmatu jsou to identicky nuly, tudíž jsou to stejné polynomy! ▽

Taylorův polynom

Je polynom $T(x)$ stupně $\leq n$ splňující

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T(x)}{(x - a)^n} = 0$$

→ Tohle určuje chybu / chybný polynom

nutně Taylorův polynom? **Ne.**

funkce f nemusí mít T příslušného stupně, protože nemusí mít příslušné derivace.

$$f = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ x^2 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

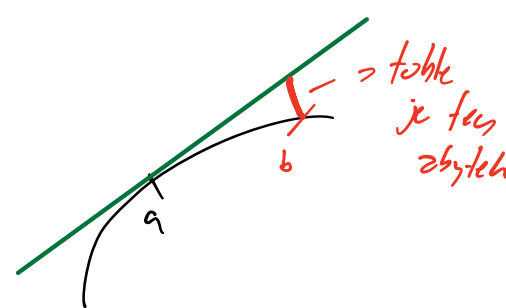
$T(x) = 0$ je to T_p 2. stupně?

T.p. v 0: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$ **ALF**

$T(x) = 0$
nemí T.p. f ,
jelikož nemá
derivace není def.

Zbytek Taylorova polynomu

$$R_n^{f,a}(x) := f(x) - T_n^{f,a}(x)$$



Charakterizace Taylorova polynomu: $R_n^{f,a}(x) = o(|x - a|^n)$ pro $x \rightarrow a$.

Theorem (Lagrangeův odhad zbytku)

Nechť f je funkce, která má na otevřeném intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ vlastní derivaci řádu $n + 1$ (a tím pádem i spojitě vlastní derivace všech nižších řádů).

Volme $a, b \in I$, kde $a \neq b$. Potom existuje bod c ostře mezi a a b takový, že platí

$$R_n^{f,a}(b) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}.$$

Speciálně pro $M \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in I$ ležící ostře mezi body a a b platí $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$, máme odhad

$$|R_n^{f,a}(b)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |b-a|^{n+1}.$$

$$\Rightarrow R_n^{f,a}(x) = O(|x-a|^{n+1}) \text{ pro } x \rightarrow a$$

Taylorova řada

Pokud má funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ derivace všech řádů a pokud pro nějaké x platí $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^{f,a}(x) = 0$

$\Rightarrow$ posloupnost $(T_n^{f,a}(x))_{n=0}^{\infty}$ konverguje k $f(x)$.

Ekvivalentně: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$

Definice (Taylorova řada) - Taylorův polynom nekonečného stupně

Má-li funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ derivace všech řádů, rozumíme pro $x \in \mathbb{R}$ její *Taylorovou řadou se středem v a* řadu

$$T^{f,a}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n.$$

Maclaurinova řada = Taylorova řada se středem v 0

Taylorův polynom

$$T^{f,0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Přiřad'te funkci její Taylorovu řadu se středem v nule:

a. $(1+x)^m$  A. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$

b. e^x  B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$

c. $\ln(x+1)$  C. $\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} x^n$

www.menti.com 5184 3333 [▶ Kvíz](#)

příklad
posl. $\frac{x^n}{n}$, tedy
nelouveruje
pro $x=0$

Rovná se vždy součet Taylorovy řady v x funkční hodnotě $f(x)$? **Ne.**

Výpočet limity pomocí Taylorova polynomu

Buď budeš opatrně aplikovat L'H, nebo: T.p

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{(\cos(x) - 1)(\exp(x) - 1)}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(|x|^3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \mathcal{O}(|x|^2)$$

$$\exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \mathcal{O}(|x|)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-\frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(|x|^3)}{\left(-\frac{x^2}{2!} + \mathcal{O}(|x|^2)\right) \cdot (x + \mathcal{O}(|x|))} = \frac{\cancel{\frac{-x^3}{3!}} \cdot \left(1 + \frac{\mathcal{O}(|x|^3)}{x^3}\right)}{\frac{\cancel{x^3}}{2!} \cdot \left(1 + \frac{\mathcal{O}(|x|^2)}{x^2}\right) \dots} \end{aligned}$$

jde k nule (above the first fraction)
jde k nule (below the second fraction)

$$Al = \frac{1}{3}$$