

Matematická analýza 1 (NMAI054)

12. přednáška

Tereza Klimošová

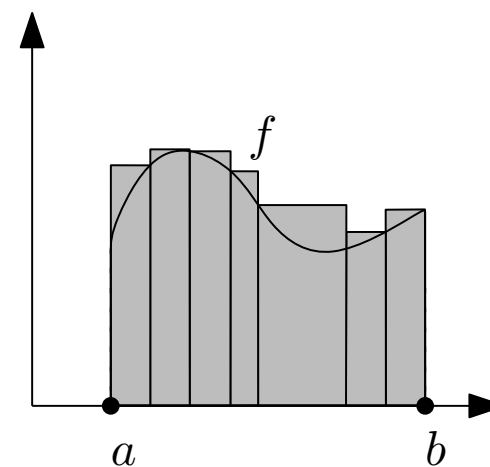
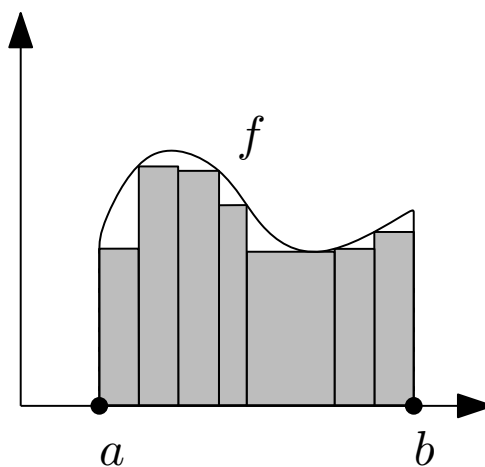
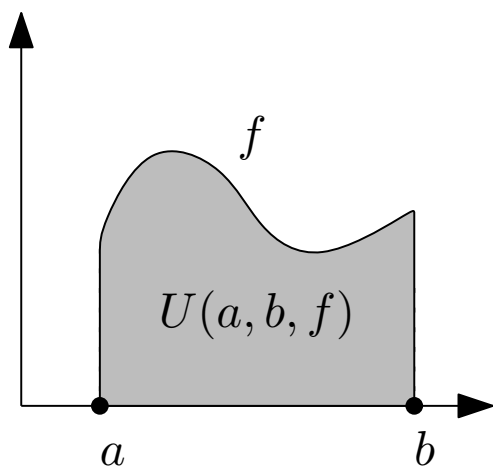
tereza@kam.mff.cuni.cz

5.května 2022

Riemannův integrál - připomenutí

$$s(f, D) = \sum_{i=0}^{k-1} |I_i| \inf_{I_i} f, \quad S(f, D) = \sum_{i=0}^{k-1} |I_i| \sup_{I_i} f$$

$$\underline{\int_a^b} f = \sup_D s(f, D), \quad \overline{\int_a^b} f = \inf_D S(f, D),$$



Odhadněte hodnotu $\int_4^5 \sqrt{\ln x} \, dx$: [▶ Kvíz](https://www.menti.com) www.menti.com 8631 1508

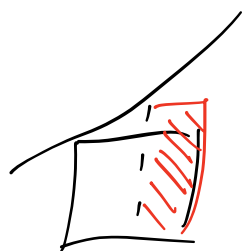
Riemannův integrál

Věta

Nechť $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce, D' a D jsou dělení intervalu $[a, b]$. Pak platí

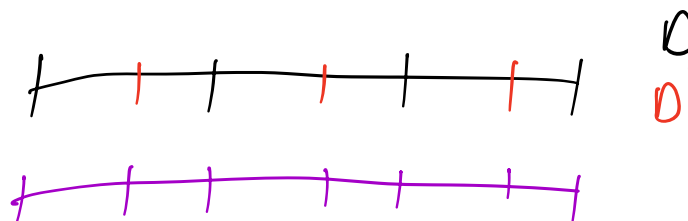
$$s(f, D) \leq \int_a^b f \leq \overline{\int_a^b f} \leq S(f, D').$$

společné zjemnění dělení D a D' = sjednocení množin dělicích bodů D a D'



$$s(f, D) \leq s(f, D'')$$

ta přesnost je vyšší,
tahle + jemnější půjde
přesněji mluvit.



$$\leq S(f, D'') \leq S(f, D')$$

Riemannův integrál - příklad

$$\int_0^1 x \, dx = \underline{\underline{1/2.}}$$

$$D_n = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\right)$$

$$\begin{aligned} S(f, D_n) &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{i-1}{n} \right) = \frac{1}{n^2} (0+1+\dots+(n-1)) \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(f, D_n) &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{i}{n} \right) = \frac{1}{n^2} \cdot (1+2+\dots+n) \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, D_n) = \frac{1}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, D_n)$$

Kritérium integrovatelnosti

Věta (Kritérium integrovatelnosti)

Nechť $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Potom

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \iff \forall \varepsilon > 0 \exists D: 0 \leq S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon.$$

Jinými slovy, f má Riemannův integrál, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ je pro nějaké dělení D intervalu $[a, b]$ odpovídající horní suma o méně než ε větší než odpovídající dolní suma.

► Kvíz [www.menti.com 2971 9500](https://www.menti.com/29719500)

Důkaz: $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \exists D: S(f, D) > \int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2}$ D'' společně zjemní D' a D
 $\exists D': S(f, D') < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}$

$$\begin{aligned} S(f, D'') - s(f, D'') &< \varepsilon \\ &< \left(\int_a^b f\right) + \frac{\varepsilon}{2} - \left(\int_a^b f\right) + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ nepřímo

$$f \notin \mathcal{R}[a, b] := \int_a^b - \int_a^b > \varepsilon > 0 \Rightarrow S(f, \mathcal{D}) - s(f, \mathcal{D}) > \varepsilon \neq 0$$



Monotonie a integrovatelnost

Věta (Monotonie $\Rightarrow$ integrovatelnost)

Je-li funkce $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ na intervalu $[a, b]$ nerostoucí nebo neklesající, potom má Riemannův integrál.

► Důkaz

Neklesající $f: \forall [\alpha, \beta] \subset [a, b]$

$$\sup_{[\alpha, \beta]} f = f(\beta) \quad \inf_{[\alpha, \beta]} f = f(\alpha)$$

Vezmeme ε , $D = (a_0, \dots, a_k)$ $|I_i| < \varepsilon \quad \forall i = 0, \dots, k-1$
 $= a_{i+1} - a_i$

$$\begin{aligned} S(f, D) - s(f, D) &= \sum_{i=0}^{k-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot (f(a_{i+1}) - f(a_i)) \leq \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon \cdot (f(a_{i+1}) - f(a_i)) = \\ &= \varepsilon \cdot (f(a_k) - f(a_0)) \end{aligned}$$

Spojitost a integrovatelnost

Věta (Spojitost $\Rightarrow$ integrovatelnost)

Je-li funkce $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ na intervalu $[a, b]$ spojitá, potom má Riemannův integrál.

1. základní věta analýzy

Newtonův integrál - připomenutí

$$(N) \int_a^b f(x) dx := [F]_a^b = F(b^-) - F(a^+) = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x).$$

Věta (1. základní věta analýzy)

Nechť $f \in \mathcal{R}[a, b]$ a funkce $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nechť je definována předpisem

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Potom

- (i) F je na $[a, b]$ spojitá a*
- (ii) v každém bodě spojitosti $x_0 \in [a, b]$ funkce f existuje vlastní $F'(x_0)$ a $F'(x_0) = f(x_0)$ (platí to jednostranně, pokud $x_0 = a$ nebo $x_0 = b$).*

- analogické tvrzení platí pro $F(x) = - \int_x^b f(t) dt$

Primitivní funkce spojité funkce

Věta (10. přednáška: Spojitá funkce má primitivní funkci)

Je-li I neprázdný otevřený interval a funkce $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je na I spojitá, pak má f na I primitivní funkci.

► Důkaz

$$\text{Zvolme } c \in I \quad F(x) = \begin{cases} \int_c^x f(t) dt & x \geq c \\ - \int_x^c f(t) dt & x < c \end{cases}$$

prim. k f ze základní věty analýzy

Důkaz 1. věty analýzy:

Spojitost: f je R. int., $\Rightarrow f$ omezen.: $\exists c: |f(x)| \leq c \quad \forall x \in [a, b]$

$$x, x_0 \in [a, b]: |F(x) - F(x_0)| = \left| \int_a^x f - \int_a^{x_0} f \right| = \left| \int_{x_0}^x f \right| \leq |x - x_0| \cdot c$$

t.j. pokud $x \rightarrow x_0$, tak $|F(x) - F(x_0)| \rightarrow 0$,

tedy $F(x) \rightarrow F(x_0) \leftarrow$ spoj. F v x_0 .

Důkaz 1. ZVA

► Důkaz

Druhá část:

x_0 pro daní ε vezmeme δ : $|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$

Pro $0 < x - x_0 < \delta$ platí: $f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{\int_{x_0}^x f}{x - x_0} \leq f(x_0) + \varepsilon$

$$\int_{x_0}^x f = F(x) - F(x_0)$$

$$\hookrightarrow F'(x_0) = f(x_0)$$

$\hookrightarrow$ podobný trik

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

2. základní věta analýzy

Věta (2. základní věta analýzy)

Pokud $f \in \mathcal{R}[a, b] \cap \mathcal{N}(a, b)$, pak

$$\int_a^b f = (N) \int_a^b f .$$

► Důkaz

F prim. k f na (a, b) , spoj. dodef. v a, b : $F(a) := F(a^+)$, $F(b) := F(b^-)$
 $(N) \int_a^b f = F(b) - F(a)$

Důkaz 2. ZVA

Vejmeme libovolné dělení $D = (a_0, \dots, a_n)$ intervalu $[a, b]$, na každý I_i použijeme Lagrangeovu větu o střední hodnotě na F :

$$\exists b_i \in (a_i, a_{i+1}) : f(b_i) = F'(b_i) = \frac{F(a_{i+1}) - F(a_i)}{a_{i+1} - a_i}$$

$$\inf_{(a_i, a_{i+1})} f \leq \underline{f(b_i)} \leq \sup_{(a_i, a_{i+1})} f$$

$$\underline{S(f, D)} \geq \underbrace{F(b) - F(a)}_{\substack{b \\ a \\ \int_a^b f}} = \sum (F(a_{i+1}) - F(a_i)) = \sum f(b_i) \cdot (a_{i+1} - a_i) \leq \underline{s(f, D)}$$

Riemannův a Newtonův integrál

$C[a, b]$ = množina spojitých funkcí na $[a, b]$

Věta (Porovnání Newtonova a Riemannova $\int$)

Máme

$$C[a, b] \subseteq \mathcal{N}(a, b) \cap \mathcal{R}[a, b] .$$

Pokud $f \in \mathcal{N}(a, b) \cap \mathcal{R}[a, b]$, pak

$$(N) \int_a^b f = \int_a^b f .$$

Množina $\mathcal{N}(a, b) \setminus \mathcal{R}[a, b]$ i $\mathcal{R}[a, b] \setminus \mathcal{N}(a, b)$ je neprázdná: existují funkce, které mají Newtonův integrál, ale ne Riemannův, i naopak.

► Důkaz

↑
neomezená, nedeGinová v
jednom krajním bodě

$$x^{-\frac{1}{2}} \text{ na } (0, 1)$$

není $\mathcal{R}$, je (N)

↑
monotónní, bez
primitivní funkce.

$$\text{např. } \sin(x)$$

