

2. cvičenie

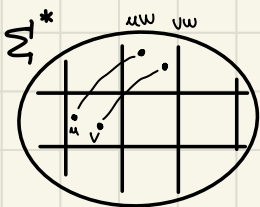
M-N veta:

$L \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \exists$ pravá kongruence (na Σ^*) konečného indexu $n = |\Sigma^*/\sim|$ t.j.
 L je sjednocením jistých tříd $\sim$.

$\sim$ pravá kongruence:

ekvivalence na Σ^* t.j.

$$u \sim v \Rightarrow u \cdot w \sim v \cdot w \quad \forall u, v, w \in \Sigma^*$$



$$A \Rightarrow \sim: u \sim v \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \delta^*(q_0, u) = \delta^*(q_0, v)$$

stava sú ekv. iff sa v automate dostanú do rovnakého stavu

$$\sim \Rightarrow A: A \stackrel{\text{def.}}{=} (\Sigma^*/\sim, \Sigma, \delta, [1], F)$$

$$\delta([u]_\sim, x) = [ux]_\sim$$

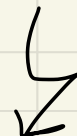
$$\{0^i 1^j \mid i \leq j\}$$

$$\{0, 00, \dots, 0^{n+1}\}$$

$$\exists i < j \quad 0^i \sim 0^j$$

$$\Rightarrow 0^i 1^i \sim 0^j 1^j$$

pridáme i jednotičiek $\hookrightarrow$ počet je menší než 0



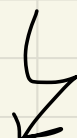
$$\{0^i 1^j \mid i \leq j\}$$

$$\{0, 00, \dots, 0^{n+1}\}$$

$$\exists i < j \quad 0^i \sim 0^j$$

$$\Rightarrow 0^i 1^j \sim 0^j 1^j$$

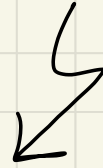
pridáme j jednotičiek $\hookrightarrow$ počet je menší než 0



$$\{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$$

$$\{00, 0000, \dots, 0^{2n+2}\}$$

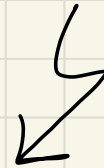
$$\exists i < j \quad 0^{2i} \sim 0^{2j} \Rightarrow \underbrace{0^{2i} 11 0^{2i} 11}_{\in L} \sim \underbrace{0^{2j} 11 0^{2i} 11}_{\notin L}$$



$$\{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$$

$$\{00, 0000, \dots, 0^{2n+2}\}$$

$$\exists i < j \quad 0^{2i} \sim 0^{2j} \Rightarrow \underbrace{0^{2i} 11 0^{2i}}_{\in L} \sim \underbrace{0^{2j} 11 0^{2i}}_{\notin L}$$



DÚ1: $\{a^p \mid p \text{ prvočíslo}\}$ ukážete, že jazyk není reg.

ekvivalentní stavy: (stavová ekvivalence)

$$p \sim q : \delta^*(p, w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q, w) \in F \quad \forall w \in \Sigma^*$$

vypočty z stavu přes stejné slovo se dostanu do stejného stavu

stavová ekvivalence do i kroků:

$$p \sim_i q : \delta^*(p, w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q, w) \in F \quad \forall w \in \Sigma^*, |w| \leq i$$

$$p \sim_0 q : p \in F \Leftrightarrow q \in F$$

aplikují podmínku pro prázdná slova

$$p \sim_{i+1} q : p \sim_i q \text{ a } \delta(p, x) \sim_i \delta(q, x) \quad \forall x \in \Sigma$$

musí být ekv do i kroků a zároveň stavy do kterých se dostaneme do i-tého kroku musí být ekvivalentní

$$\sim_{i+1} = \sim_i \Rightarrow \sim_i = \sim$$

ak sa 2-krát po sebe opakuje, zastavíme

↳ najviac krokov je # stavov
 $n_{n-2} = n$

$\mathbb{P}_2$

	a	b	$\sim_0$	a b	$\sim_1$	a b	$\sim_2$	a b	$n_3 = n_2 = n$
$\Leftrightarrow$ 0	1	2	A	B B	I	—	ε	—	
1	3	0	B	B A	II	—	δ	—	
2	4	5	B	B B	III	III IV	μ	$\mu \beta$	
3	0	2	B	A B	IV	I III	w	—	
4	2	5	B	B B	III	III IV	μ	$\mu \beta$	
5	0	3	B	A B	IV	I IV	β	—	

táto trieda sa nemôže viac rozštiepiť

keďže sú singletony
 a nemôžu sa ďalej
 štiepiť

dostaneme 1 špeciálnu podtriedu

A - trieda prijímajúcich stavov
 B - trieda neprijímajúcich stavov

najmenšie slovo pre stavy 3 a 5 je 2, potom
 sa stavy dostali do rovnakej triedy lebo sa
 líšili a dostali sme singletony

$$Q / \sim = \{ \{2,4\}, \{0\}, \{1\}, \{3\}, \{5\} \}$$

→ slovo bude ba.

⇒ algoritmus pracuje v kvadratickom čase

↳ slovo prečtem od začiatku, ale v
 tabuľke sa dívam na koniec

	a	b	$\sim_0$	a b	$\sim_1$	a b	$\sim_2$
$\Leftrightarrow$ 0	0	5	A	A B	I	I II	I
1	1	3	B	B B	II	II II	II
2	2	4	B	B B	II	II $\emptyset$	III
3	3	2	B	B B	II	II II	II
$\Leftarrow$ 4	6	1	A	A B	I	I II	I
5	5	1	B	B B	II	II II	II
$\Leftarrow$ 6	4	2	A	A B	I	I II	I
7	7	0	B	B A	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

↓
 * stav bude vo svojej vlastnej triede

DŮ 2: $\forall n \geq 3 \exists$ konečný automat

$$\begin{aligned} n_{n-2} &= n \\ n_{n-3} &\neq n \end{aligned}$$