Důkaz:

Cílem bude sporem ukázat, že dvě slova s různou prvočíselnou délkou nemohou být ve stejné třídě ekv. a tudíž musí existovat nekonečně mnoho takových tříd, což je spor s konečností indexu pravé kongruence v Myhill–Nerodově větě.

Pro spor tedy uvažme, že existují prvočísla $p \neq q$, búno $p > q$, a slova a^p, a^q ve stejné ekv. třídě. Pak díky pravé kongruenci musí platit, že: $L \ni a^q = a^p a^{q-p} \in L$. Stejně tak $L \ni a^{2q-p} = a^q a^{q-p} \in L$.

Obdobným způsobem mohu rozšířit:

$$L \ni a^{2q-p} = a^p a^{2q-2p} \in L. \text{ Stejně tak ale } a^q a^{2q-2p} = a^{3q-2p} \in L.$$

(všechno šedé je používání pravé kongruence)

Nahlédneme tedy, že $a^{p+q\cdot i-pi} \in L \quad \forall i \geq 0$, stejně tak $a^{q+qi-pi}$.

Zde však ale neplatí, že mocnina a je prvočíslo pro všechna i. !

Pro $i = p$: $\quad p + q\cdot p - pp = p + qp - p^2 = \underbrace{p\cdot(1+q-p)}_{\text{toto celé má být prvočíslo}}$

tudíž

$\rightarrow (1+q-p)$ musí být rovno 1, avšak $q \neq p$, tudíž jsme došli ke sporu. ↯

Ukázali jsme tedy, že žádná dvě prvočísla nejsou ve stejné ekv. třídě. Tudíž takových tříd je nekonečně mnoho, což implikuje i nekonečnost indexu pravé kongruence ve větě. Tedy jazyk L není regulární.

Důkaz:

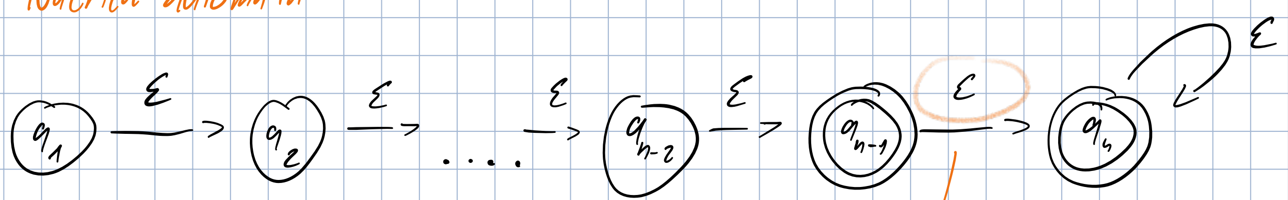
Stavová ekv.: $p \sim q : \delta^*(p,w) \in F \iff \delta^*(q,w) \in F, \ \forall w \in \Sigma^*$

Stavová ekv. do i kroků: $p \sim_i q : \delta^*(p,w) \in F \iff \delta^*(q,w) \in F, \forall w \in \Sigma^* : |w| \leq i$

Pro zadané $n \geq 3$ mějme automat se stavy $q_1 - q_n$, kde q_1 je výchozí, q_{n-1}, q_n finální stavy.
Pro $q_1 - q_{n-1}$: $\delta(q_i, x) = q_{i+1}$ pro $x \in \Sigma$. Speciálně pro $q_n : \delta(q_n, x) = q_n$ pro $x \in \Sigma$.
Pak pro $i = n-3$ platí, že $\delta^*(q_1, w) = q_{n-2} \notin F \ \forall w \in \Sigma^* : |w| = i$
avšak $\delta^*(q_2, w) = q_{n-1} \in F \ \forall w \in \Sigma^* : |w| = i$. Tedy neplatí stavová ekvivalence pro $n-3$.

Nyní však pro $i = n-2$ platí, že $\delta^*(q_1, w) = q_{n-1} \in F \ \forall w \in \Sigma^* : |w| = i$
a $\delta^*(q_2, w) = q_{n-1} \in F \ \forall w \in \Sigma^* : |w| = i$.
Jelikož je stav q_1 je od finálních stavů nejvzdálenější a platí $\delta^*(q_1, w) \in F$ pro $|w| = n-2$, bude platit i pro libovolné jiné dva body. Tudíž stavová ekv. pro $n-2$ platí.

Náčrtek automatu:



Znamená, že platí pro všechny znaky abecedy.