Důkaz části 1:

$$E = \frac{1}{n} \sum_i d^2(x_i, Q(x_i)) \qquad 1)$$

máme $Q(x) = c_i$

$d^2(x, Q(x))$

$\parallel$

Nyní uvažme, že E musí být minimální, v opačném případě dokážeme spor s minimalitou.

$$Q(x) = c_i \implies \forall j: d(x, c_i) \le d(x, c_j)$$

Nyní uvažme sčítance v sumě 1). $\forall c_i, c_j$ musí platit: $d(x,c_i) \le d(x,c_j) \implies d^2(x,c_i) \le d^2(x,c_j)$.

Jelikož jde o metriku, která nenabývá záporných čísel, tedy i 2 mocnina bude nezáporná a rovnost bude zachována.

Tedy speciálně kdyby neplatila implikace a existovala by jiná barva z palety c_j jakožto reprezentant x, která by byla barvám x bližší, tedy $d(x,c_i) > d(x,c_j)$, pak by nemohlo být E pro $Q(x)=c_i$ minimální, což by byl spor s minimalitou E. ☒

Obráceně uvažme, že platí:

$$\forall j: d(x, c_i) \le d(x, c_j) \implies Q(x) = c_i$$

Díky předchozímu pozorování s nezáporností metriky a zachování nerovnosti platí, že pro jakékoli $j \neq i$ bude $d(x,c_i) \le d(x,c_j) \implies d^2(x,c_i) \le d^2(x,c_j)$

$$E_i = \frac{1}{|R|} \cdot \sum_{x \in R} d^2(x, c_i) \le \frac{1}{|R|} \cdot \sum_{x \in R} d^2(x, c_j) = E_j$$

$\underline{E_i \le E_j}$ pro libovolný zvolený sektor R.

Tedy pokud by neplatila pravá strana implikace, tedy $Q(x) \neq c_i$, pak pro každý sčítanec v sumě bude platit, že existuje c_i t.ž. $d(x,c_i) \le d(x,c_j)$, tudíž není zaručena minimalita E. Což je opět spor.

Důkaz části 2:

Mějme $E = \frac{1}{n} \sum_i d^2(x_i, Q(x_i))$

$$E = \frac{1}{|R_i|} \sum_{x \in R_i} d^2(x, Q(x))$$

Ukážeme, že $c_i = Q(x)$, tedy barva pro daný sektor

$$\frac{\partial E}{\partial c_i} = \frac{1}{|R_i|} \cdot \sum_{x \in R_i} \left(2 \cdot (x - c_i) \cdot (-1)\right)$$

$$= \frac{-2}{|R_i|} \cdot \sum_{x \in R_i} (x - c_i) = 0$$

$0 \neq$ tedy $\rightarrow = 0$

nulová derivace v lokálním minimu/maximu

pak $\sum_{x \in R_i} (x - c_i)$

$$= \sum_{x \in R_i} x - |R_i| \cdot c_i$$

$$\Rightarrow c_i = \frac{1}{|R_i|} \cdot \sum_{x \in R_i} x$$