

kl. prostor: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ — kumbece pln' m'ch' —

kl. prostor: $P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$ — kumbece pln' m'ch', každý má jinou p'st.

Hod dvěma kostkami: $\Omega = \{2 \dots 12\}$
 $\hookrightarrow \{1 \dots 6\}^2$ — tohle je model, co všechno můžem hodit

Geom. p'st. prostor: — příklad: hod na tero

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$$

$$P(A) = \frac{V_d(A)}{V_d(\Omega)}$$

d -rozměrný objem
 $d=1 \rightarrow$ přímka...
 $d=2 \rightarrow$ obsah...

$\mathcal{F}$ — množ., kde V_d je def.

Chceme ale alt. kl. prostor

Vážený geom. prostor: (spojitý)

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$$

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

$$\text{tj. } \int_{\Omega} f(x) dx = 1$$

$$P(A) = \int_A f(x) dx$$

integrace 1 := to je výpočet d -rozměrného objemu

$$\text{Platí: } P(\Omega) = 1 \quad \checkmark$$

Platí axiom se sčítáním (sčítám p'st $\Rightarrow$ sčítám objem)

Podmínění pravděpodobnost: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$P(A|B)$ — to co vím
 $\hookrightarrow$ tam, čemu přidám p'st

Polud $B = \Omega$, pak $P(B) = 1$, $P(A \cap B) = P(A) := P(A|\Omega) = P(A)$

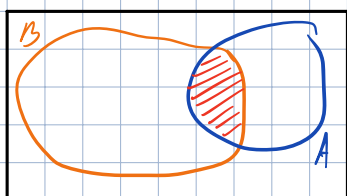
Thm: Mějme $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $B \in \mathcal{F}$, $P(B) > 0$.

Mějme $Q(A) := P(A|B) \quad \forall A \in \mathcal{F}$.

Pak $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ je p'st. prostor.

Tedy všechny pravidla platí i pro podmíněný p'st.

Důk:



Takže se vlastně doměřím jen na tu prámku. Musím ale stále být v potaz $P(B)$

$$Q(\Omega) \neq P(\Omega \cap B) = P(B) \neq 1$$

$$Q(\Omega) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

Po vzájemném dostátím —> podm. p'st

$$Q(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P((A_1 \cup A_2 \cup \dots) \cap B) / P(B) = Q(A_1) + Q(A_2) + \dots$$

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) \quad \text{— toto je ještě intuitivnější}$$

Pr: Mám 32 let, 8 ad brny

$A_1, A_2, \dots, A_i$, kde $A_i := i$ -tá letná je syrová.

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) = \frac{8}{32} \cdot \frac{7}{31}$$

→ předpokládá, že
jsem uspořádaný
v prvních 6 let

$$\text{Co když: } P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \\ = \frac{8}{32} \cdot \frac{7}{31} \cdot \frac{6}{30}$$

Thm: Jistězení pravděpodobnosti:

$A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$, $P(A_1 \cap \dots) > 0$, pak

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)$$

Ob:

$$\cancel{P(A_1)} \cdot \frac{\cancel{P(A_1 \cap A_2)}}{\cancel{P(A_1)}} \cdot \frac{\cancel{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}}{\cancel{P(A_1 \cap A_2)}} \cdot \dots \cdot \frac{\boxed{P(A_1 \cap \dots \cap A_n)}}{\cancel{P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})}}$$

→ zde přehledně nezáleží na pořadí

Thm: Věta o rozkladu množin (věta o celkové pravděpodobnosti)

$$P(A) = \sum_i P(B_i) \cdot P(A|B_i), \text{ kde } A \in \mathcal{F}, B_1, B_2, \dots \text{ tvoří rozklad } \Sigma$$

B_i je konečný nebo spočetný

$$\Sigma = \bigcup_i B_i, \text{ kde } B_i \cap B_j = \emptyset : i \neq j$$

$$\text{Ob: } A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots$$

$$= P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \dots \quad \text{a je nám indukčním předpis}$$

$$= \sum_i P(B_i) \cdot P(A|B_i)$$

☺ Dán smysl počítat jen nad vzájemnými B_i množinami

Pr: $B_1 = \text{"prší"}$

$B_2 = \text{"sněží"}$

$B_3 = \text{"nic nepade"}$

$A = \text{"jdu na výlet"}$

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + P(B_3) \cdot P(A|B_3)$$

prší a jdu na výlet sněží a jdu na výlet je pěkně a jdu na výlet

→ Rozložením tedy všechny strany a sečtení druhé pol. psti.

Df: $a \in \mathbb{Z}, 0 \leq a \leq n$

Gambles - ruin problem

Opakemů: km o 1 Kč, $P(+1) = \frac{1}{2}$ $P(-1) = \frac{1}{2}$ $\text{Konec: } 0 \text{ nebo } n \text{ Kč.}$

$$P(\text{vyhraje}) = ?$$

$B_1 = \text{výhram v 1. kolo}$

$$B_2 = B_1^c$$

$$P(V) = P(B_1) \cdot P(V|B_1) + P(B_2) \cdot P(V|B_2)$$

$$\text{"} \quad \frac{1}{2} \quad f(n+1) \quad \frac{1}{2} \quad f(n-1)$$

$$f(0) = 0 \quad \dots \quad f(n) = 1 \quad \dots \quad f(a) = \frac{a}{n}$$

$\hookrightarrow$ Tohle už je pravděpodobný předpis pro řešení

Thm: Bayesova věta:

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j) \cdot P(A|B_j)}{\sum_i P(B_i) \cdot P(A|B_i)}, \quad A \in \mathcal{F}, B_i \text{ jsou vzájemně disjunkt, } P(B_j) > 0, \text{ nikoliv } P(B_i) \text{ nepositivní}$$

Důk:

$$= \frac{P(A \cap B_j)}{P(A)} = \frac{P(B_j) \cdot P(A|B_j)}{\text{"věta o totální pravděpodobnosti"}} \quad \boxed{\times}$$

Pr: N : nemoc, $P(N) = \frac{1}{1000}$

T : test vyšel pozitivní, $\text{sensitivita} := \frac{95}{100} = P(T|N)$

$\text{specifita} := \frac{95}{100} = P(T^c|N^c)$

$$P(N|T) = ?$$

$$A = T$$

$$B_1 = N$$

$$B_2 = N^c$$

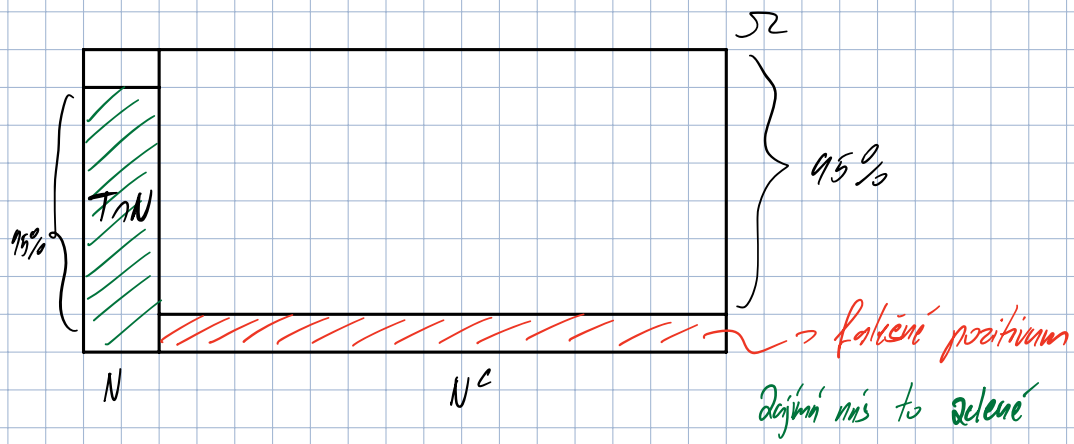
$$P(N|T) = \frac{P(N) \cdot P(T|N)}{P(N) \cdot P(T|N) + P(N^c) \cdot P(T|N^c)}$$

$$= \frac{\frac{1}{1000} \cdot \frac{95}{100}}{\frac{1}{1000} \cdot \frac{95}{100} + \frac{999}{1000} \cdot \frac{5}{100}} =$$

$$= 1,8\%$$

$\hookrightarrow$ jde o triviální doplňek, tedy $P(N) + P(N^c) = 1$

to ale musí platit pro $P(T|N) + P(T|N^c) = 1$



Df: Nezávislé jevy:

$$A, B \in \mathcal{F} : P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$\text{pokud } P(B) > 0 : A, B \text{ nez. pokud } P(A) = P(A|B)$$