

Def: Iem $A_1, A_2, \dots, A_n$ jsou nezávislé polhnd.
 $\forall J \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \quad P\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$

Diskrétní náhodné veličiny

Def: Diskrétní náh. veličina je: $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ t.e.

(obor hodnot) $H(X)$ je nejvýše spočetný

$$\{\omega \in \Omega: X(\omega) = x\} \in \mathcal{F} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

→ tedy umíme zjistit pst.

Lze vytvořit nový pst. prostor:

$$\Omega' = H(X)$$

$$\mathcal{F}' = \mathcal{P}(\Omega')$$

$$P(\{x\}) = P(X = x)$$

Pro disk. n.v. je to diskrétní pst. prostor.

Def: Pravděpodobnostní funkce $p_x(x) = P(X = x)$

 $\sum_{x \in H(X)} p_x(x) = 1$

Dk: $\Omega = \bigcup_x \{X = x\}$

$$P(\Omega) = \sum_x P(\{X = x\}) = 1$$

Př:

1) Bernoulliho rozdělení:

$$X: \Omega \rightarrow \{0, 1\}, \quad P(X = x) = p = p_x(1)$$

$$L \rightarrow X \text{ dotčení úspěch} \quad P(X \neq x) = 1 - p = p_x(0)$$

$$X \sim \text{Ber}(p)$$

Def: Indikační n.v. $A \in \mathcal{F}$:

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & : \omega \in A \\ 0 & : \omega \notin A \end{cases}$$

$$I_A \sim \text{Ber}(P(A))$$

2) Geometrické rozdělení $X \sim \text{Geo}(p)$

motivace: čekání na úspěch, kolikrátým pokusem uspěje, když
pst. úspěch je p .

Def: $X \sim \text{Geo}(p)$

$$X: \Omega \rightarrow \{1, 2, \dots\}$$

$$P_X(k) = P(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_X(k) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} \cdot p = \frac{(1-p)^0 \cdot p}{1-(1-p)} = \frac{p}{p} = 1$$

3) Binomické rozdělení: $X \sim \text{Bin}(n, p)$

motivace: počet úspěchů z n pokusů

$$H(X) = \{0, 1, \dots, n\}$$

$$P_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k=0, \dots, n$$

$$\sum_{k=0}^n P_X(k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1$$

4) Hypergeometrické rozdělení $X \sim \text{Hypergeo}(N, K, n)$

motivace: # červených míčů při tahání bez opakování

$$P_X(k) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \dots = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{K}{N}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{K}{N}\right)^{n-k}$$

$\hookrightarrow$ pokud $n \ll N$

5) Poissonovo rozdělení $X \sim \text{Pois}(\lambda)$

$$H(X) = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$P_X(k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \quad \rightarrow \text{počet SMS za den}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = 1$$

$$X_n \sim \text{Bin}(n, \frac{\lambda}{n}) \quad n > \lambda$$

$$P(X_n=k) = \binom{n}{k} \frac{\lambda^k}{n^k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

Tedy zjevně Poiss je aprox. Bin. rozdělení

Def: Poissonovo paradigma:

$A_1, A_2, \dots$ jsou nezávislé jevy, t.č. $\sum P(A_i) = \lambda$,
pak $\sum I_{A_i}$ je přibližně $\sim \text{Pois}(\lambda)$

Def: Střední hodnota $EX = \sum_{x \in H(X)} P(X=x) \cdot x$