

Def: $E X = \sum_{x \in H(X)} x \cdot P(X=x)$

Pr: $X \sim \text{Bern}(p) : H(X) = \{0, 1\}$

$E X = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) = p \rightarrow$ téměř urč. intuitivní

$L >$ reprezentuje to průměrnou hodnotu veličiny

$L >$ průměrná hodnota hodí dostkem je 3,5, např.

Pr: $X \sim \text{Bin}(n, p), H(X) = \{0, \dots, n\}$

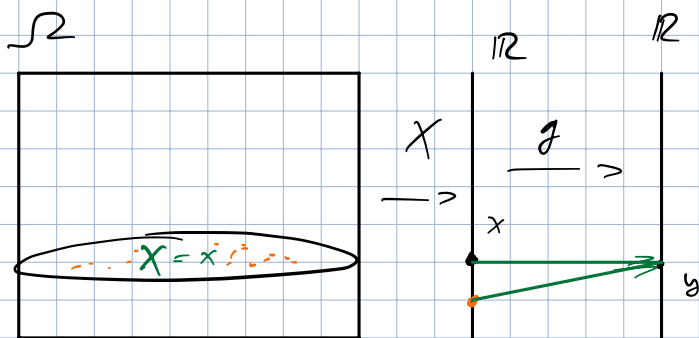
$E X = \sum_{k=0}^n k \cdot P(X=k) = \sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} =$

$= p \cdot n \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} \cdot (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$
 $(p + (1-p))^{n-1} = 1$

Pr: $X \sim \text{Geom}(p) \quad X = \text{udílátým hodem podle } 6? \quad E X = ?$

$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p \cdot (1-p)^{k-1} = \dots = \frac{1}{p}$

$E X = \frac{1}{p} = 6$



$E X = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\{\omega\})$

To se počítá na pravděpodobnost této množiny

Tudíž vynásobením druhé hodnoty získáme střední hodnotu

Funkce disk. náh. vel.

X — d.n.v. na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$Y = g(X) = g \circ X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$Y(\omega) = g(X(\omega))$ je výpočet spočítání

Y je také d.n.v. $\rightarrow |H(Y)| \leq |H(X)|$

$\rightarrow \{Y=y\} \in \mathcal{F} \quad \forall y \in \mathbb{R}$

$\bigcup_{x: g(x)=y} \{X=x\}$ — všechna x , která se zobrazí na y .
 $\rightarrow$ to celé $\in \mathcal{F}$, protože X je d.n.v.

Thm. PNS (problém univního statistika):

$$EY = \sum_{x \in H(X)} g(x) \cdot P(X=x)$$

↑
uvážíme výše

(oprh.) Def: $EY = \sum_{y \in H(Y)} y \cdot P(Y=y)$

$$= \sum_{y \in H(Y)} y \cdot P\left(\bigcup_{\substack{x \in H(X) \\ g(x)=y}} \{X=x\}\right)$$

$$= \sum_{x \in H(X)} g(x) P(X=x)$$

každé x se vybere jen jednou,
jinak by platilo

$$\begin{aligned} g(x) &= y_1 \\ g(x) &= y_2 \end{aligned} \quad y_1 \neq y_2 \quad \boxed{5}$$

Thm: (Vlastnost, E)

$X, Y \dots$ d.n.v.

1) $P(X \geq 0) = 1 \Rightarrow E(X) \geq 0 \quad \rightarrow$ pokud $E(X) = 0 \Rightarrow P(X=0) = 1$

2) $E(X) \geq 0 \Rightarrow P(X \geq 0) > 0 \quad \rightarrow$ musí tam určitě být nějaký nezáporný prvek.

3) $E(aX+b) = aE(X) + b$

4) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

} Linearity střední hodnoty

Důk 3:

$$g(x) = ax+b, \quad Y = g(X) = aX+b$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_x (ax+b) \cdot P(X=x) = \sum_x ax P(X=x) + \sum_x b P(X=x) \\ &= a \cdot EX + b \end{aligned}$$

$a \cdot EX$
 b
 $= 1$
Po sečtení smyč:

Důk 4:

jen pro $|\Omega| \leq |\mathbb{N}|$:

$$EX = \sum_{w \in \Omega} X(w) \cdot P(\{w\})$$

$$EY = \sum_w Y(w) \cdot P(\{w\})$$

$$EX + EY = \sum_w (X(w) + Y(w)) \cdot P(\{w\}) = E(X+Y)$$

Důk 1:

$$EX = \sum_{x \geq 0} x \cdot P(X=x) + \sum_{x < 0} x \cdot P(X=x)$$

≥ 0

Dle 2: Obměna implikace (důkaz) je přesně věta 1). $\square$

Př.: U_1 uniformní na $\{1-6\}$

U_2 $\begin{cases} 0 & k_1 \neq 6 \\ \text{unif } (1-6) & k_1 = 6 \end{cases}$

$U_2' = \text{jaká } U_2, \text{ ale } U_2 \neq 1$

$$X = U_1 + U_2$$

$$Y = U_1 + U_2'$$

X : Poloh $x=6$, každý zrov. sčítán dvé.

Y : Poloh $x=1$, každý zrov. sčítán dvé.

$$EX = EU_1 + EU_2 = \frac{49}{12}$$

$$1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} \dots = \frac{7}{2}$$

$$\sum_k k \cdot P(U_2 = k)$$

$$= 0 \cdot \frac{5}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6^2} \dots + 6 \cdot \frac{1}{6^2} = \frac{7}{2}$$

$$EY = EU_1 + EU_2' = \frac{49}{12}$$

Sice je střední hodnota stejná, ale distribuce bude jiná!

Př.: $X \sim \text{Bin}(n, p)$ $p = \frac{1}{6}$

$$EX = ? = EX_1 + EX_2 + \dots + EX_n = \underline{n \cdot p}$$

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

$$X_i = I_{\{6 \text{ na } i\text{-tém místě}\}}$$

$$X_i \sim \text{Bern}(p)$$

$$EX_i = p$$

Def: Podmíněná střední hodnota

$$E(X|B) := \sum_{x \in H(X)} x \cdot P(X=x|B), \quad P(B) > 0, \quad X \dots \text{d.n.v.}$$

Thm: O celkové střední hodnotě (o rozboru případů)

Poloh $B_1, B_2, \dots$ tvoří rozklad Ω , X je d.n.v., tak $EX = \sum_i P(B_i) \cdot E(X|B_i)$

Př.: $X \sim \text{Geom}(p)$ (Uklidňovat jsem hodil, což podle 6 z)

$$B_1 = \{ \text{první hod } 6 \}$$

$$B_2 = B_1^c$$

$$EX = P(B_1) \cdot E(X|B_1) + P(B_2) \cdot E(X|B_2)$$

$$= p \cdot 1 + (1-p) \cdot (1 + EX)$$

$$p \cdot EX = 1 \Rightarrow EX = \frac{1}{p}$$

Thm: $X \sim \text{d.n.v.}, H(X) \leq \infty$

$$\text{Pal } E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n)$$

Dk: $X = \sum_{n=0}^{\infty} I_{X > n}$ $\rightarrow$ možno trvať $X=15$, pak rovnou mám 15x jedničky, kterým se sečte a to stejné!

Níže limitně: $EX = \sum E I_{X > n}$

Př: i-tý hod kostky n prvních 6 by

$$EX = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n)$$

nepadne 6 při hodech 1, 2 - n

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^n = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$$

$\hookrightarrow$ limitně nepadne 6

② $E(X^2) \neq (EX)^2$

Def: Rozptyl n.v. X je $\text{var}(X) = E((X - EX)^2)$

Thm: $\text{var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \geq 0$