Def: Rozptyl: $var(X) = \mathbb{E}\left(\left(X-\mathbb{E}(X)\right)^2\right)$

↳ dostanu popis toho, jak je X rozptýlená.

Thm: $Var(X) = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$

Dk: označme $\mu = \mathbb{E}X$. Pak $Var(X) = \mathbb{E}\left((X-\mu)^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2 - 2\mu X + \mu^2\right) =$

$$= \mathbb{E}X^2 - 2\mu\mathbb{E}(X) + \mu^2$$
$$= \mathbb{E}X^2 - 2(\mathbb{E}(X))^2 + (\mathbb{E}(X))^2$$
$$= \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 \qquad \boxed{\times}$$

Důsledek: $\mathbb{E}X^2 \geq (\mathbb{E}(X))^2$

Důsledek: $Var(X) = \mathbb{E}X\cdot(X-1) + \mathbb{E}X - (\mathbb{E}X)^2$

konstantní

Pozorování: $Var(X) = 0$, kdy? Pokud $P(X = \mathbb{E}(X)) = 1$

Pozorování:

$$Var(aX+b) = a^2\, Var(X)$$

↳ posun mi rozptyl z logiky věcí nemůže změnit, protože se posune i střední hodnota. Naopak škálování roli hraje.

↳ vychází přímo z definice

$$(aX+b) - \mathbb{E}(aX+b) = R$$
$$= (aX + \cancel{b}) - (a\mathbb{E}(X) + \cancel{b})$$
$$= aX - a\cdot\mathbb{E}(X)$$
$$Var(aX-b) = \mathbb{E}(R^2) = a^2\cdot\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}X)^2\right)$$

Př.: $X \sim Ber(p)$

$\mathbb{E}(X) = p$ Podle def: $Var(X) = p\cdot(1-p)^2 + (1-p)\cdot(0-p)^2$

$$= p(1-p)\cdot(1-p+p) = p(1-p)$$

Podle věty: $\mathbb{E}X^2 = \mathbb{E}X = p - p^2$

Př.: $X \sim Geom(p)$: $\mathbb{E}X = \frac{1}{p}$, $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Př.: $X \sim Bin(n,p)$: $\mathbb{E}X = np$, $Var(X) = np\cdot(1-p)$

→ proto tyhle jsou n-krát víc

→ $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, $X_i \sim Ber(p)$

Př: $X \sim Pois(\lambda)$ $\quad P(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$ $\quad k = 0,1 \dots$ $\quad \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = 1$

$$EX = \sum_{k=\cancel{0}1}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k-1!} = \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{k-1!} = \lambda \cdot 1 = \lambda$$

$$E X \cdot (X-1) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{k-2} \lambda^2}{(k-2)!} = \lambda^2 \cdot 1 = \lambda^2$$

$Var(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$ $\longrightarrow$ vychází z toho vzorce pro $Var(X)$ nahoře.

Def: Směrodatná odchylka: $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$

Př: $X \sim Hypergeo(N, K, n)$

$X \dots$ # červených z n vytažených BEZ OPAK.

$\left.\begin{array}{l} N \text{ míčků} \\ K \text{ červených} \end{array}\right\}$ Celkem

$EX = n \cdot \frac{K}{N}$ $\longrightarrow$ $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

$X_i \begin{cases} 1 & i\text{-tý vytažený míček je červený} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

$Var X = n \cdot \frac{K}{N} \cdot \left(1 - \frac{K}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$

$X_1 \sim Bern\left(\frac{K}{N}\right)$ $\rightarrow$ Mám plnou krabici a všechny červené

$X_2 \sim Bern\left(\frac{K}{N}\right)$ $\rightarrow$ Proč? Protože je jakoby „tahám" najednou a tudíž mají všechny stejnou šanci.

$\vdots$

Nejsou nezávislé!

Náhodné vektory

Def: X, Y disk. náh. vel.

Sdružená prav. fce $P_{X,Y}(x,y) = P(X = x \text{ AND } Y = y)$

(X, Y) je náh. vektor, pokud jsou definovány $\forall x, y \in \mathbb{R}$, tj. $\{X = x, Y = y\} \in \mathcal{F}$

Př.: Lze z $P_{X,Y}$ určit P_X, P_Y? ①

Lze z P_X, P_Y určit $P_{X,Y}$? ②

X, Y

$x \backslash y$	1	2	3	4	Σ
1	1/16	1/16	1/16	1/16	1/4
2	1/16	1/16	1/16	1/16	1/4
3	1/16	1/16	1/16	1/16	1/4
4	1/16	1/16	1/16	1/16	1/4

X', Y'

$x \backslash y$	1	2	3	4
1	1/4	0	0	0
2	0	1/4	0	0
3	0	0	1/4	0
4	0	0	0	1/4

$$P(X=1) = P(X=1, Y \in \{1,2,3,4\}) =$$
$$P((X,Y) \in \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\}) =$$
$$P(X,Y=(1,1)) + P(X,Y=(1,2)) + \dots$$
$$\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots \frac{1}{4}$$

Thm: $P_X(x) = \sum_{y \in H(Y)} P_{X,Y}(x,y)$

⋮

stejně pro y

$$P_X, P_Y \underset{\longleftarrow}{\cancel{\longrightarrow}} P_{X,Y}$$

nefunguje, pouze pro nezávislé funguje

Def: X, Y jsou nezávislé pokud $\forall x,y \in \mathbb{R}$: jevy $\{X=x\}$ a $\{Y=y\}$ jsou nezávislé.

Př.: Hodíme n-krát kostkou. (nezávislé jevy)

V každém hodu má 1 pravd. $p_1 \geq 0$

2 pravd. $p_2 \geq 0$

⋮

$\sum p_6 = 1$

X_1 — X_6 d.n.v.

$X_i :=$ # hodů, kde padlo i

$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \dots) = ?$

$\underbrace{1\ 1}_{k_1}\ \underbrace{2 \dots}_{k_2} \dots \underbrace{6}_{k_6}$

$$= \frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_6!} = \binom{n}{k_1! \dots k!}$$

<= nezajímají mě permutace uvnitř jednotlivých k_i

$$P_{X_1}(k_1) = \sum_{k_2 \dots k_6} P_{X_1 \dots X_6}(k_1 \dots k_6) =$$

$$X_1 \sim Bin(n, p_1) \sim \binom{n}{k_1} p^{k_1} \cdot (1-p)^{n-k_1}$$

Thm: Funkce n.v. $Z = g(X,Y)$

$$P_Z(z) = \sum_{\substack{x,y \in H(X),H(Y) \\ g(x,y)=z}} P_{X,Y}(x,y)$$

Důsledek: Konvoluční vzorce:

$g(x,y) = x+y$ AND X, Y jsou nezávislé, pak $P_Z(z) = \sum_{x} P_X(x) P_Y(z-x)$

Př: $P_Z(4) = P_{X,Y}(1,3) + P_{X,Y}(2,2) + P_{X,Y}(3,1)$ → pokud nezávislé $= P_X(3) \cdot P_Y(1)$

Thm: PNS

$$\mathbb{E}g(X,Y) = \sum_{\substack{x \in H(X) \\ y \in H(Y)}} g(x,y) \cdot P_{X,Y}(x,y)$$