Př.: $X \sim Bin(m,p)$

$Y \sim Bin(n,p)$

X, Y nezávislé, $Z = X + Y$

$$P_Z(z) = \sum_x P_X(x) \cdot P_Y(z-x)$$

$$\parallel$$

$$P(X+Y=z) = \sum_{x=0}^{m} \binom{m}{x} p^x \cdot (1-p)^{m-x} \cdot \binom{n}{z-x} p^{z-x} \cdot (1-p)^{n-(z-x)}$$

$$= p^z \cdot (1-p)^{m+n-z} \underbrace{\sum_{x=0}^{n} \binom{m}{x}\binom{n}{z-x}}$$

$$= p^z \cdot (1-p)^{m+n-z} \cdot \binom{m+n}{z}$$

důsledkem tedy je

$Z \sim Bin(m+n, p)$

Thm: $\mathbb{E}(aX+bY) = a\mathbb{E}X + b \cdot \mathbb{E}Y$ → veličiny nemusí být nezávislé

Dk: $g(x,y) = ax + by$

$$\mathbb{E}g(X,Y) = \sum_{x,y} g(x,y) \cdot P_{X,Y}(x,y)$$

→ věta Nahv. statistika

$$= \sum_{x,y} a \cdot x \cdot P_{X,Y}(x,y) + \sum b y \cdot P_{X,Y}(x,y)$$

$$= \underbrace{a \cdot \underbrace{\sum_x x \underbrace{\sum_y P_{X,Y}(x,y)}_{P_X(x)}}_{\mathbb{E}X}}_{a \cdot \mathbb{E}X}$$

→ jdu přes všechny „y", tedy dostanu samotnou pst „x".

→ Stejně pro druhou půlku

Thm: X, Y nezávislé $\Rightarrow \mathbb{E}XY = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$

Dk: $g(x,y) = xy$

$$\mathbb{E}X \cdot Y = \sum_{x,y} xy \cdot \underbrace{P_{XY}(x,y)}_{P_X(x) \cdot P_Y(y)}$$

$$= \sum_x x \cdot P_X(x) \cdot \sum_y y \cdot P_Y(y)$$

$$= \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$$

Pozn: Dokonce platí, že $\mathbb{E}(f(X) \cdot h(Y)) = \mathbb{E}(f(X)) \cdot \mathbb{E}(h(Y))$

Def: X, Y náh. veličiny, **Kovariance** náhodných veličin

$$cov(X,Y) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}X)\cdot(Y - \mathbb{E}Y)\big)$$

$$cov(X,X) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}X)\cdot(X - \mathbb{E}X)\big) = var(X)$$

X, Y nezáv. $\Rightarrow cov(X,Y) = 0$

$$|cov(X,Y)| \leq \sqrt{var(X)\cdot var(Y)}$$

$$cov(X, aY + bZ + c) = a\cdot cov(X,Y) + b\cdot cov(X,Z)$$

$Y = const \Rightarrow cov(X,Y) = 0$

Def: Korelace

$$cor(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{var(X)\cdot var(Y)}}$$

Thm: $cov(X,Y) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y$

Dk:

$$cov(X,Y) = \mathbb{E}\big((X-\mathbb{E}X)\cdot(Y-\mathbb{E}Y)\big)$$

$$\mathbb{E}\big(XY - \underbrace{(\mathbb{E}X)}_{a}Y - X\cdot\underbrace{(\mathbb{E}Y)}_{b} + \underbrace{\mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y}_{c}\big) = \mathbb{E}(XY) - a\mathbb{E}Y - b\mathbb{E}X + c$$

$$= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y$$

Thm: $var(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i,j=1}^{n} cov(X_i, X_j)$, spec. pokud $X_1 - X_n$ nezávislé,

$$= \sum_{i=1}^{n} var(X_i)$$

$\Leftrightarrow$ pro $i=j$ $cov(X_i, X_j) = var(X_i)$

pro $i \neq j$ $cov(X_i, X_j) = 0$ $\rightarrow$ pro nezávislé!

Def: Podmíněná prav. fce

$$P_{X|A}(x) = P(X=x \mid A)$$

$x \in \mathbb{R}$, X … n.v., A … jev $\subseteq \Omega$

$$P_{X|Y}(x,y) = P(X=x \mid Y=y) = \frac{P(X=x \;\&\; Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{P_{X,Y}(x)}{P_Y(y)} = \frac{P_{X,Y}(x,y)}{\sum_{x'} P_{X,Y}(x',y)}$$

Obecné náhodné veličiny

Def: Náh. vel. na pr. pros. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

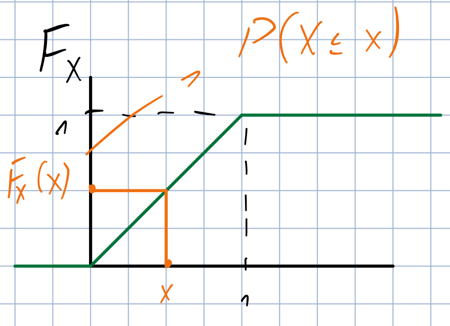
je $X: \Omega \to \mathbb{R}$ t.ž. $\forall x \in \mathbb{R}$

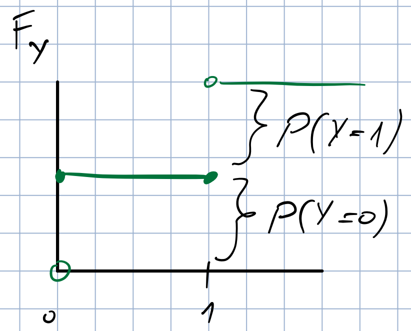
$$\{X \le x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\} \in \mathcal{F}$$

$$P(X \le x) := F_X(x)$$

Funkce F_X se nazývá distribuční fce X.

CDF: cumulative distribution function





$X \sim Bern(\frac{1}{2})$

Thm: Vlastnosti F_X

1) F_X je neklesající

2) $F_X(-\infty) = 0$

3) $F_X(+\infty) = 1$

4) F_X zprava spojitá: $F_X(x) = \lim_{y \to x^+} F_X(y)$

Dk: 1) $x < y \Rightarrow F_X(x) \leq F_X(y)$ $\quad P(X \leq x) \leq P(X \leq y)$

$$\{X \leq x\} \subseteq \{X \leq y\}$$

Def: Spojitá náh. vel. X:

taková n.v. že: $\exists f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.ž. $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\,dt$

$\hookrightarrow$ hustota na X

Thm: Spoj. náh. vel. X s hust. f_X:

1) $P(X = x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(t)\,dt$