$X : \Omega \Rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t)\,dt$$

Thm: (PNS)

$$\mathbb{E}g(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f_X(t)\,dt$$

Dk: Není potřeba

$$\operatorname{var}(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \mathbb{E}(X))^2 f_X(t)\,dt = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

$$\hookrightarrow \int x^2 f_X(x)$$

Linearita $\mathbb{E}$ platí i zde:

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}X + b\mathbb{E}Y$$

Mějme $X \sim Exp(\lambda)$

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$ distribuční funkce

$$f_X(x) = F_X'(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$$ hustota

test, zda $f$ je hustota:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \overset{?}{=} 1 \quad .. \quad = \int_{-\infty}^{0} 0 + \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} = 0 - (-1) = 1 \quad \checkmark$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) = \int_0^{\infty} \lambda x \cdot e^{-\lambda x} = \left[\lambda x \cdot \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \lambda \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} = 0 + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\lambda \int_0^{\infty} x \cdot e^{-\lambda x}$$

$f = x \quad dg = e^{-\lambda x}dx$

$$f \cdot g = \lambda \cdot \left(x \cdot \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right)$$

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} = \left[-x^2 \cdot e^{-\lambda x}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -2x \cdot e^{-\lambda x} = \int_0^\infty 2x e^{-\lambda x} = \boxed{\frac{2}{\lambda^2}}$$

$\lambda \cdot \quad f = x^2 \quad dg = e^{-\lambda x}\,dx$

$\cancel{\lambda} \cdot \quad f \cdot g = x^2 \cdot \frac{e^{-\lambda x}}{-\cancel{\lambda}}$

<- znám per partes

$$\operatorname{var}(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

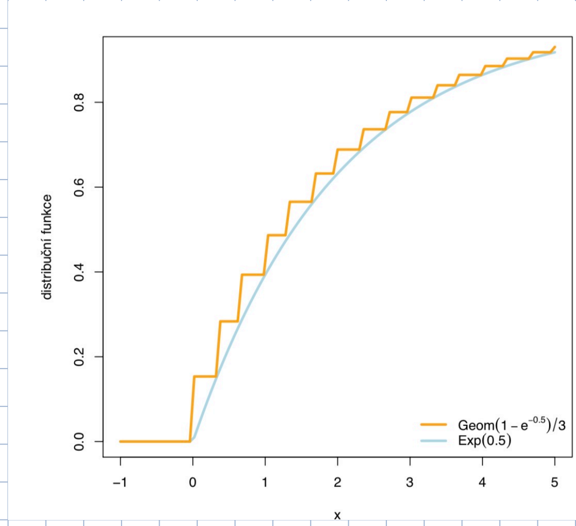
-> proč to potřebujeme? Jak moc se při opakování netrefí do střední hodnoty

$Y \sim Exp(\lambda) \quad \dots \quad P(Y > n\delta) = e^{-n\delta\lambda} = \left(e^{-\lambda\delta}\right)^n$

$X \sim Geom(p) \quad \dots \quad P(X > n) = (1-p)^n$

$1 - p = e^{-\lambda\delta}$ $\qquad \delta \doteq 0$, $\quad p \doteq \lambda\delta$

$Y \dots$ čas, kdy se rozpadne atom
$\in \mathbb{R}$




## Normální rozdělení:

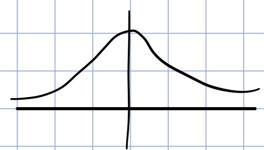
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$N(0,1) \dots$ hustota $\varphi$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt$$

Potřebujeme $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2} = 1$ -> to platí díky konstantě $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

$$\Phi(0) = \int_{-\infty}^{0} \varphi(t)\,dt = \frac{1}{2}$$



-> je sudá a celý integrál $\int_{-\infty}^{\infty}$ je 1!
tudíž tohle musí být $1/2$.

$$P(\underset{\substack{\uparrow \\ N(0,1)}}{Z} \leq 0) = 1/2$$

$$EZ = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x \cdot e^{-x^2/2}}_{\text{lichá}} = 0$$

$$1 = \left[-e^{\cancel{x}^2/\cancel{x}}\right]_0^\infty = \int_0^\infty x e^{-x^2/2} = -\int_{-\infty}^{0} x \cdot e^{-x^2/2}$$

protože

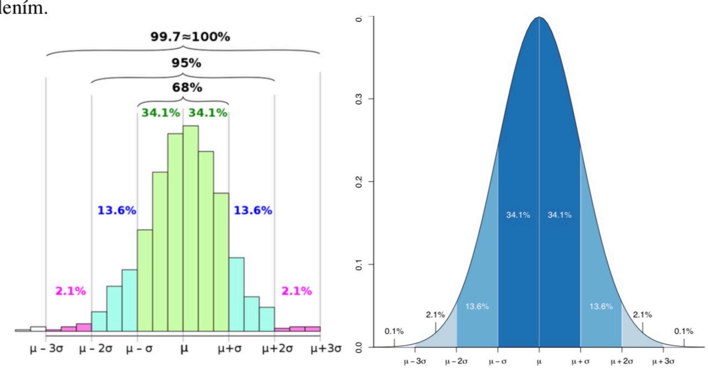
-> to ale neplatí, pokud ten integrál je nekonečno

$$var(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}Z = \mathbb{E}(Z^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-x^2/2} = \dots = 1$$

Pro praktické použití je užitečné pravidlo $3\sigma$ (anglicky 68–95–99.7 rule). To říká, že

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \doteq 0.68$$
$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \doteq 0.95$$
$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \doteq 0.997,$$

viz obrázek. Pokud narazíte na text, který říká, že tento index je větší než 2 pro 2.5% populace, budete hned vědět, že se jedná o veličinu se standardním normálním rozdělením.




(Obrázek vlevo z Wikipedie, autor Melikamp.)

C > aprox. rozdělení součtu n.n.v.

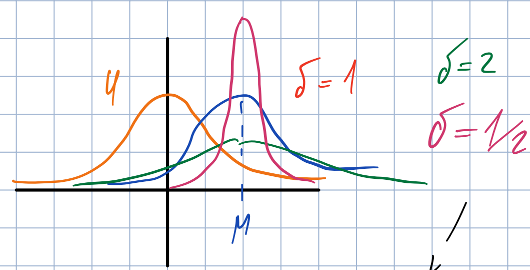
$X = \mu + \sigma Z, \quad Z \sim N(0,1)$

$\mathbb{E}X = \mu + \sigma \mathbb{E}Z = \mu$

$var\, X = \sigma^2 \cdot var(Z) = \sigma^2$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

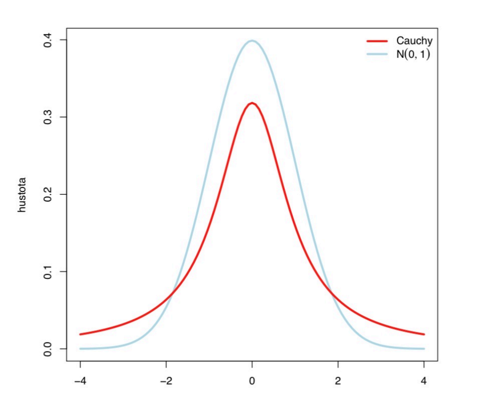
$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ $\qquad \varphi_X(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$




fakt mi ale musí sedět plochu pod grafem

$\mathbb{E}\,\text{Cauchy} = \infty - \infty$

C > takže přestože to vypadá podobně jako normální rozdělení, tak je víc „zploštělé" a nesedí to.



Př: spoj diskrt.

Mějme $X + Y = Z$ je $Z$ spoj.?

Např.: $Y \sim Bern(\frac{1}{2})$

$\vdots$

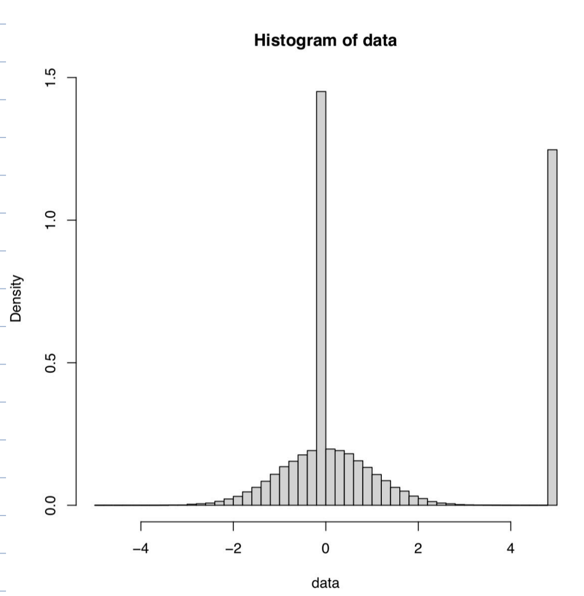
s pstí $\frac{1}{2}$ $X$

s pstí $\frac{1}{2}$ $X+1$

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = \underset{\llcorner Y=0}{\frac{1}{2} P(X \le z)} + \underset{\llcorner Y=1}{\frac{1}{2} P(X \le z-1)} =$$

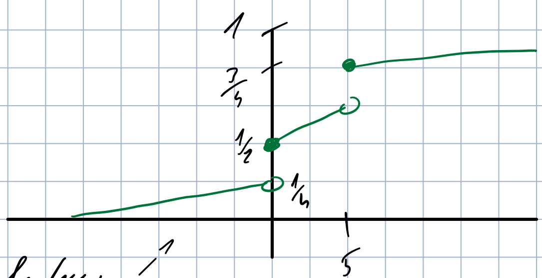
$$= \frac{1}{2} F_X(z) + \frac{1}{2} F_X(z-1) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{z} f_X(t) + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{z-1} f_X(t) = \int_{-\infty}^{z} \overbrace{\frac{1}{2} f_X(t) + \frac{1}{2} f_X(t-1)}^{f_Z(t)\ \dots\ \text{hustota } Z}$$

Pak $Z$ je tedy spoj. n.v.




$W =$ $\frac{1}{2}$ $N(0,1)$

$\phantom{W =}$ $\frac{1}{2}$ $5 \cdot Bern(\frac{1}{2})$




distribuční funkce: ↗

hustotu nelze počítat, jelikož nemá spojitý a nespočetný obsah.

$$EW = \frac{1}{2} \cdot E\, N(0,1) + \frac{1}{2} E(5 \cdot Bern(\tfrac{1}{2})) = 5/4$$

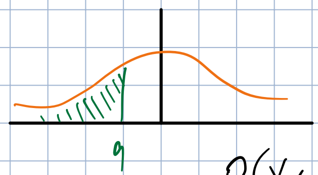
Thm: (Celková hustota)

$X$ spoj. n.v. $B_1, B_2, \dots$ rozklad $\Omega$. Pak

$$F_X(x) = \sum_i P(B_i) F_{X|B_i}(x) \qquad \to P(X \le x | B_i)$$

$$f_X(x) = \sum_i P(B_i) f_{X|B_i}(x)$$

# Kvantilová funkce



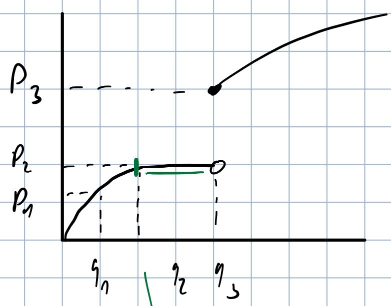

$$p = P(X \leq q) = F_X(q)$$
$$q = Q_X(p) = F_X^{-1}(p)$$

zde zjevně med. = 1

Co ale když $X = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases}$ s pstí $1/3$

**Def:** Kvantilová funkce $Q_X(p) = \min\{t \in \mathbb{R}, p \leq F_X(t)\}$ (*)

Př.: Mějme $F_X$:




$p_i = F_X(q_i)$

$q_i = Q_X(p_i)$

tady se zvolí minimum, protože — je vodorovné mezi $q_2$, $q_3$, vybere se $q_2$.

Proto obecně:

$$p \leq F_X(q) \iff Q_X(p) \leq q$$

K čemu to je?

$Q_X\left(\frac{1}{2}\right)$ ... medián n.v. $X$ $m$

$P(X \leq m) \geq 1/2$

$P(X \geq m) \geq 1/2$

$Q_X(1/4)$ ... 1. kvartil

$Q_X(3/4)$ ... 3. kvartil

$Q_X\left(\frac{k}{10}\right)$ ... k-tý „?"

$Q_X\left(\frac{k}{100}\right)$ ... k-tý percentil

Thm: $F$ je fce typu distr. fce $\longrightarrow$ $F(+\infty) = 1$

$F(0) = 0$

$F$ zpr. spoj, nekl.

$Q$ .... dle definice ⊛

$U \sim U(0,1)$

$\Rightarrow X = Q(U)$ je n.v. s distr. fcí $F$.

tohle F-ko

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(\underbrace{Q(U) \le x})$$

$$P(U \le F(x)) = F(x)$$

Př:

$Exp(\lambda)$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \ge 0 \end{cases}$$

$F(x)$ spoj $\Rightarrow Q_X = F_X^{-1}$

$p = 1 - e^{-\lambda x}$

$1 - p = e^{-\lambda x}$

$-\lambda x = \log(1-p) \Rightarrow x = \boxed{\dfrac{\log(1-p)}{\lambda}} = Q_X(p)$

Thm: $X$ je n.v. s rost. distr. fcí $F_X$.

Pak $F_X(X) \sim U(0,1)$ $\quad$ $X$ nesmí být diskrétní n.v.

$\hookrightarrow$ uniformní testování na oboru $[0,1]$

**Def:** Sdružená distribuční funkce n.v. $X, Y$

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x \;\&\; Y \le y)$$

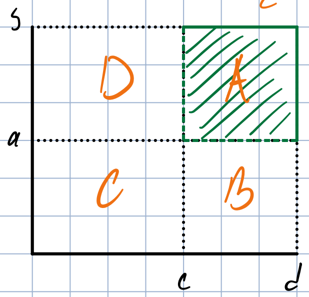
→ předpokládám, že daná pst je definovaná

$\Leftrightarrow \{\omega : X(\omega) \le x, Y(\omega) \le y\} \in \mathcal{F}$

**Thm:** $F = F_{X,Y}$

$$P\left(X \in (a,b] \;\&\; Y \in (c,d]\right) =$$

$$= F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c)$$




$A = \{a < X \le b \;\&\; c < Y \le d\}$

$$= P(A \cup B \cup C \cup D) - P(C \cup D) - P(B \cup C) + P(C)$$

($A, B, C, D$ jsou disjunktní)

$$P(A) + \underline{P(B)} + \dots \quad - \underline{P(B)} \dots$$

všechno kromě $A$ se vyruší

$$\underline{\underline{= P(A)}}$$

(Pro 1D to bylo: $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$)