$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x \ \& \ Y \le y)$$
$$= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t)\, dt\, ds$$

$\to$ sdružená hustota

Thm: PNS: $\mathbb{E}\left(g(X,Y)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) \cdot f_{X,Y}(x,y)$ $\quad \to g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\Downarrow$

Thm: $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$

Def. Marginální hustota

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy$$ $\to$ analogicky pro y

Nezávislost náhodného vektoru:

X,Y jsou nez. $\iff$ $\forall x,y \in \mathbb{R}$ jevy $\{X \le x\}$ & $\{Y \le y\}$ jsou nez.

tedy $P(X \le x \ \& \ Y \le y) = P(X \le x) \cdot P(Y \le y)$

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$ taky tohle

Thm: $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ (pokud mají hustotu)

Podmíněná hustota

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(x,y)}$$

Konvoluční vzorec

Pokud X,Y n.n.v., $Z = X+Y$, pak $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x)\, dx$

Př: $X,Y \sim N(0,1)$

$f_X = f_Y = \varphi \quad \to \quad f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}_{\varphi(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}}_{\varphi(z-x)} \cdot dx$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2} \cdot e^{-\left(\frac{z}{2}\right)^2} dx$$

$$= e^{-\left(\frac{z}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}}_{= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\left(z/\sqrt{2}\right)^2}{2}}$$

hustota $N(0,2)$

Př: Vícerozměrné norm. rozdělení:

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n) = \varphi(t_1) \cdot \varphi(t_2) \cdot \dots \cdot \varphi(t_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot e^{-\frac{t_1^2}{2}} \cdot e^{-\frac{t_2^2}{2}} \cdot \dots \cdot e^{-\frac{t_n^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot e^{-\frac{r^2}{2}}, \text{ kde } r = \|(t_1, \dots, t_n)\|$$

Z = n.v.s. hustotou f

$= (Z_1 \dots Z_n)$

Pozorování: $Z_1 - Z_n \sim N(0,1)$

platí i pro >2, jen 2 je ilustrativní

Pokud $Z = (X, Y)$ $\quad f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Z(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\varphi(y)\,dy = \varphi(x) \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\,dy}_{=1} = \varphi(x)$

protože to je hustota

Generování: Vygeneruji „n" n.v. $\sim N(0,1)$, pak z nich udělám vektor.

$\frac{Z}{\|Z\|}$ je uniformní náhodný jednotkový vektor

Def: Obecné vícerozměrné n.v.

$f \sim e^{-Q \cdot (t-\mu)}$, kde μ je n-tice čísel, Q je PSD matice

positivně semidefinitní matice kv. fce

Př:

① 99% lidí starší než $\mathbb{E}$?

- stačí spousta stejně starých a jeden extrém.

② 51% . . . $2 \times \mathbb{E}$? - pokud věk > 0

- nelze

$b = 2$

Thm: Markovova nerovnost:

X je n.v., $X \geq 0 \implies \forall a > 0 \; P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$

ekv. $P(X \geq b \cdot \mathbb{E}X) \leq \frac{1}{b}$

Dk: 2

$$\overset{B}{\mathbb{E}}(X) = P(X \geq a) \cdot \mathbb{E}(X \mid X \geq a) + P(X < a) \cdot \mathbb{E}(X \mid X < a)$$

$$\geq P(X \geq a) \cdot a + P(X < a) \cdot 0$$

Př: Mějme alg., kde doba běhu je T, $\mathbb{E}T = n^2$

$$P(T \geq cn^2) \leq \frac{1}{c}$$

Pak jen jednou za „c" mi poběží déle jak n^2 čas.

Thm: Čebyševova věta

X n.v. $\mathbb{E}X = \mu < \infty$, $\operatorname{Var} X = \sigma^2 < \infty$, pak

$$P(|X-\mu| \geq t \cdot \sigma) \leq \frac{1}{t^2}$$

Markovova nerovnost

Dk:

$$Y = (X-\mu)^2 \geq 0.$$

$$\mathbb{E}Y = \operatorname{var} X = \sigma^2$$

$$P(|X-\mu| \geq t \cdot \sigma) = P(Y \geq t^2 \cdot \underbrace{\sigma^2}_{\mathbb{E}Y}) \leq \frac{1}{t^2}$$

Silný zákon velkých čísel

$X_1, X_2, \ldots$ n.n.v., stejné rozdělení, $\mathbb{E}X = \mu$, $\operatorname{var} X = \sigma^2$

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$$ (výběrový průměr)

Thm: $\lim_{n \to \infty} \overline{X}_n = \mu$ skoro jistě, tedy

$$P(\text{—} \,\|\, \text{—}) = 1$$

$X_1, X_2 \ldots$ experim. měření, mám $\overline{X}_n$ průměry, pak pokud dělám nekonečně mnoho těchto průměrů tak mi to konverguje k reálné hodnotě.

$$\int_\Omega g(x) \qquad X_i = g(\text{náhodný bod v } \Omega)$$

$\longrightarrow$ Monte Carlo integrování

Slabý zákon velkých čísel

(stejné předpoklady jako u velkých)

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim P(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) = 0$$

$\bar{X}_n$ konvergují k μ pstí, značíme $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$

(tohle říká slabší tvrzení: „Možná to bude pro velká čísla platit, ale s malou pstí“).

Dk:

$$E\bar{X}_n = \frac{EX_1 + \dots + EX_n}{n} = \mu$$

→ jsou n.n.v.

$$\operatorname{var} \bar{X}_n = \frac{\operatorname{var} X_1 + \operatorname{var} X_2 + \dots + \operatorname{var} X_n}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

tohle se tedy blíží k nule.

$$\sigma_{\bar{X}_n} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad t = \sqrt{n}\,\frac{\varepsilon}{\sigma} \qquad P\left((\bar{X}_n - \mu) \geq \underbrace{t \cdot \sigma_{\bar{X}}}_{\varepsilon}\right) \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

$\hookrightarrow$ To mi říká, kolik potřebuji měření, abych věděl, že chyba nastane jen v x % případů.