$$E(\bar{X}_n) = (E(X_1) + \dots + E(X_n))/n = \frac{n \cdot \mu}{n} = \mu$$

$$Var(\bar{X}_n) = (Var(X_1) + \dots + Var(X_n))/n^2 = \frac{\sigma^2 \cdot n}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Čebyševova nerovnost: $P(|X-\mu| \geq k) = \frac{Var(X)}{k^2} = \frac{\sigma^2}{k^2 \cdot n}$

$$P(|X-\mu| \geq \varepsilon) = \frac{\sigma^2}{n \cdot \varepsilon^2}$$

Pravidlo naivního statistika:

$$E(g(X)) = \sum_{x \in Im(X)} g(x) \cdot P(X=x)$$

Dk: Nechť $Y = g(X)$: $E(Y) = \sum_{y \in Im(Y)} y \cdot P(Y=y)$,

kde $y = g(x)$ a $P(Y=y) = \sum_{x \in Im(X), g(x)=y} P(X=x)$

Nyní jen dosadím do vzorce...

$3 \cdot 0{,}8 =$	2,4	0,8
	0,2	0,2
	0,4	0,6
	3,0	1,6

250 dní jezdím načerno.
$p = 0{,}02$, že mě chytne
X počet setkání s revizorem

--> Jde o $Bin(250, 0{,}02)$

a) $E(X)$? --> $E(X) = 5$

b) $P(X=5)$? $p_X(5) = \binom{250}{5} \cdot 0{,}02^5 \cdot (0{,}98)^{245}$

$Pois(\lambda)$ je lim. $(n, \lambda/n)$ $\quad \lambda/250 = 0{,}02$

$\lambda = 5$

$Pois(5)$

c) Při každé kontrole máme 1/3 šanci, že se nad námi slitují.

Y = Počet dní, kdy zaplatíme pokutu. Určete $\mathbb{E}(Y)$ a $Var(Y)$

$P(\text{Budu platit})$

Sdružená dist. fce:

$$F_{X,Y}(x,y) = P\left(\{w \in \Omega : X(w) \leq x \wedge Y(w) \leq y\}\right)$$

$$\underbrace{F(1,1) - F(0,1) - F(1,0)}_{-0{,}2} + F(0,0) =$$

$$0{,}6 \quad 0{,}4 \quad 0{,}4$$

Tohle musí mít nezápornou hodnotu, tudíž to musí být alespoň 0,2

Rozptyl je roven 0, pokud $\mathbb{E}(X) = X$, tedy jde o konst. veličinu

$$\mathbb{E}(g(X,Y)) = \sum_x \sum_y g(x,y) \cdot P(X=x \wedge Y=y)$$

$$= \sum_x \sum_y ax + by \cdot P(X=x \wedge Y=y)$$

$$= \sum_x \sum_y ax \cdot P(X=x \wedge Y=y) + by \cdot P(X=x \wedge Y=y)$$

$$a \cdot \mathbb{E}(X) + b \cdot \mathbb{E}(Y)$$

$$a \cdot \sum_x x \cdot P(X=x) + b \cdot \sum_y y \cdot P(Y=y)$$

$$\sum_x ax \cdot P(X=x) + \sum_y by \cdot P(Y=y)$$

$$\sum_{x,y} ax \cdot P(X=x \wedge Y=y) + \sum_{x,y} b \cdot y \cdot P(Y=y \wedge X=x)$$

$X \leq Y$ skoro jistě: $P(X \leq Y) = 1 \Rightarrow$ Pak vždy $P(X \leq t) \geq P(Y \leq t)$

Mějme jevy $A, B, C \in \mathcal{F}$. Jevy jsou nezávislé, pokud $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

$\forall t \in \mathbb{R}: F_X(t) \geq F_Y(t) \Rightarrow X \leq Y$ skoro jistě

V každém kroku: $P(X=1) = 1/6$, zisk $= 1$

V prvním hodu: $E(X) = (1 + \dots + 6)/n$

V druhém hodu: $E(X) = [(1 + \dots + 6)/n] \cdot 5/6$

V třetím hodu: $E(X) = [(1 + \dots + 6)/n] \cdot (5/6)^2$

– vždycky mám E(jednoho hodu) $= 3{,}5$

Jenže abych se dostal do dalšího hodu, musel jsem v předchozím nehodit 1, tedy s pstí $5/6$. (jevy jsou nezáv.)

V ntém hodu mám tedy $E(X_n) = 3{,}5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n$

$$\lim_{n \to \infty} 3{,}5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$$

V každém hodu můžu hodit 1–6. Tudíž $E(X)$ izolovaného hodu $= 3{,}5$

Tedy dostanu-li $X \geq 4$, chci rozhodně ukončit hru.

$$P(X=2 \mid Y=1) = P(X=2, Y=1) / P(Y=1) = 3/18 \,/\, \tfrac{1}{3} = \tfrac{3}{18} \cdot \tfrac{3}{1} = \tfrac{9}{18} = \tfrac{1}{2}$$

$$P(Y=1 \mid X=2) = P(Y=1, X=2) / P(X=2) = 3/18 \,/\, \tfrac{1}{3} = \tfrac{3}{18} \cdot \tfrac{3}{1} = \tfrac{9}{18} = \tfrac{1}{2}$$

$P(X=1) = 1/3 = P(Y=1)$

$P(X=2) = 1/3 = P(Y=2)$

$P(X=3) = 1/3 = P(Y=3)$

$P(X=2, Y=1) = 2/18 \neq 1/3 \cdot 1/3$

$E(X) = E(Y) = 2$

$$E(X \cdot Y) = \tfrac{1}{18} + 2 \cdot 2/18 + 3 \cdot 3/18 + 2 \cdot 3/18 + 4 \cdot 1/18 + 6 \cdot 2/18 + 3 \cdot 2/18 + 6 \cdot 3/18 + 9 \cdot 1/18$$

$$= 14 \cdot 1/18 + 11 \cdot 2/18 + 11 \cdot 3/18$$

$$= 14/18 + 22/18 + \tfrac{33}{18} = \tfrac{64}{18} = \tfrac{32}{9}$$

$X_i \sim Pois(\gamma)$, $m_1(\gamma) = \gamma$, $\widehat{m_1(\gamma)} = \bar{X}_n$ tedy $\lambda = \frac{38}{40}$

Ludvík a jeho děti:

Bude mít syna s pstí $1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots = 1$

Celkový počet dětí ~> to se řídí Geom(1/2) $= 2$ → „na libovolný pokus to vyjde"

A jelikož $\mathbb{E}(S+D) \Rightarrow \mathbb{E}(S) + \mathbb{E}(D) = 2 \Rightarrow \mathbb{E}(D) = 1$

$X, Y \sim U(0,1)$ n.n.v

$A = \min(X,Y)$, $B = \max(X,Y)$

a) $F_B(b) = ?$ Protože $U(0,1)$, tak $b < 0 \Rightarrow F_B(b) = 0$, $b > 1 \Rightarrow F_B(b) = 1$

pro $b \in \langle 0,1 \rangle$ $F_B(b) = P(B \leq b) = P(X \leq b \wedge Y \leq b) \underset{n.n.v.}{=} P(X \leq b) \cdot P(Y \leq b) = b^2$

b) $f_B(b) = F_B(b)' = \underline{\underline{2b}}$

c) $\mathbb{E}(B) = \int_{-\infty}^{+\infty} b \cdot 2b \, db = 2\int_0^1 b^2 db = \left[\frac{2}{3} b^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}$

d) Určete $\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y), \mathbb{E}(A)$

$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 1/2 \;\; \to \;\; \mathbb{E}(X+Y) = 1$

$X + Y = A + B$, tím pádem i $\mathbb{E}(A+B) = 1$, tedy $\mathbb{E}(A) = 1/3$

$cov(A,B) = \mathbb{E}(A \cdot B) - \mathbb{E}(A) \cdot \mathbb{E}(B)$

$\hookrightarrow A \cdot B = X \cdot Y \Rightarrow \mathbb{E}(AB) = \mathbb{E}(XY)$, X, Y n.n.v. $\Rightarrow \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{4}$

$cov(A,B) = 1/4 - 2/9 = \underline{\underline{1/36}}$

Sdružená hustota: $f_{X,Y}(x,y) = \partial^2 F_{X,Y}(x,y) / \partial x \partial y$, kde $F_{X,Y}$ je sdruž. distr. fce spoj. n.v. X a Y.

Jevy A_i, $i \in I$ jsou nezáv.: $P(\bigcap_i A_i) = \prod_i P(A_i)$

Mějme $A_i = \{0, i\}$ pro $i = 1 \ldots 3$ v $\Omega = \{0,1,2,3\}$

Pak $P(A_i) = 1/2$, nicméně $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1/4 \neq 1/8$

$P(Y \leq 100) = 1$

$P(X = 101) \neq 0$

$\mathbb{E}(X) = 1/10 \quad \mathbb{E}(Y) = 10 \qquad \mathbb{E}(X - Y) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) < 0,$

ale $Y \geq 0$, tedy X může $< Y$

$X \sim N(0,1)$, $Y = |X|$

$F_Y(y) = ? \qquad F_X(x) = P(X \leq x) \implies F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(|X| \leq y)$

$= P(-y \leq X \leq y) \longrightarrow$ to lze rozepsat jako $P(Y \leq y) - P(Y \leq -y)$

Pro $y < 0 \quad = 0$ $\qquad = F_Y(y) - F_Y(-y)$

Pro $y > 0$: $F_Y(y) = \Phi(y) - \Phi(-y)$ $\qquad$ Díky symetrii $F_Y(y) + F_X(-y) = 1$

$= 2\Phi(y) - 1$

Φ je prim k φ, tedy $f_Y = 2\varphi = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-y^2/2}$

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_Y(y)\, dy = \int_0^{\infty} y \cdot 2\varphi(y)\, dy = \int_0^{\infty} y \cdot \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-y^2/2} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int e^{-y^2/2} \cdot y\, dy =$$

$$-\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int e^u\, du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left(-e^{-y^2/2}\right)$$

Medián: $F_Y^{-1}(1/2) \to 2\Phi(y) - 1 = 1/2 \to y =$

$\Phi(y) = 3/4 \to y = \Phi^{-1}(3/4)$

$15 \cdot \frac{1}{5} - \frac{p}{5}$

$P(X = 6) = p$

$P(X \neq 6) = (1-p)/5 = \frac{1}{5} - \frac{p}{5}$

$\mathbb{E}(X) = 6 \cdot p + (1+2+3+4+5) \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{p}{5}\right)$

$= 6p + 3 - 3p = 3p + 3$

$p = \frac{1}{2} \qquad \frac{3}{2} + \frac{6}{2} = \frac{7}{2}$

4,5

$6 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{1}{10} =$

Najděte odhad $\hat{p}$ momentovou metodou. $\bar{X}_n = 3+3p$ $\quad 11/3 = 3+3p$

$2,6,3 = 11/3$ $\quad 2/3 = 3p$

$2/9 = p$

$1,2,\dots,100$, vytáhnu 3 bez vrácení

$P(A_1) = \frac{40}{100}$, $P(A_2) = \frac{39}{99}$, $P(A_3) = \frac{38}{98}$

Pravděpodobnost $= \frac{40}{100} \cdot \frac{39}{99} \cdot \frac{38}{98}$

$\mathbb{E}(\text{součtu tří čísel}) = \mathbb{E}(X_1+X_2+X_3) = \mathbb{E}(X_1)+\mathbb{E}(X_2)+\mathbb{E}(X_3)$

$\mathbb{E}(X_i) = (100+1)/2$ $\qquad \mathbb{E}(X_1+X_2+X_3) = 303/2$

<=> uniformně náhodný výběr

$E(\#\text{počet míčků} \le 40)$ ~> jde o hypergeom. rozdělení:

$\mathbb{E}(X) = n \cdot \frac{K}{N} = 3 \cdot \frac{4}{10} = \frac{12}{100}$

Doba trvání zkoušky $\sim Exp(\frac{1}{10})$

X : 10:00

Y : 10:20

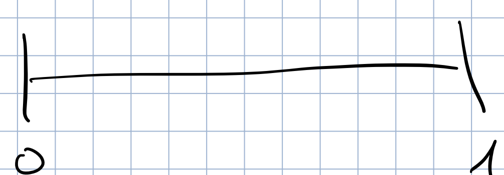
$S :=$ čas, kdy bude druhý student dozkoušený

Nečeká: $P(X \le 20) = 1-e^{-1}$ -> $S = 20+Y$, díky linearitě $\mathbb{E}(S/X\le 20) = 20+\mathbb{E}(Y)$

$= 40$

Čeká: $P(X > 20) = e^{-1}$ $\quad \mathbb{E}(S/X>20) = 20+\mathbb{E}(X/X>20)+\mathbb{E}(Y)$

$P(X<Y) => |\{\omega \in \Omega : X(\omega) < Y(\omega)\}| / |\Omega|$



$\frac{25}{36}$ $1-\frac{25}{36}=\frac{9}{36}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

ABABAB... P(6 padne první Adamovi)

$$\left(\frac{5}{6}\right)^0\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^4\cdot\frac{1}{6}+\ldots=\frac{1}{6}\cdot\sum_i^\infty\left(\frac{5}{6}\right)^{2i}$$

$$f(x)=\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}\quad x\in\langle 1,\infty),\ \alpha>1$$

$$1=\int_1^\infty \alpha\cdot x^{-\alpha-1}\,dx=\alpha\cdot\int_1^\infty x^{-\alpha-1}\,dx=\left|\begin{matrix}u=-\alpha-1\\ du=-1dx\end{matrix}\right|=\alpha\cdot\int_1^\infty -x^u\,du=-\alpha\cdot\left[\frac{x^{u+1}}{u+1}\right]_1^\infty=$$

$$\left[-\alpha\cdot\frac{x^{-\alpha}}{-\alpha}\right]_1^\infty=0-1=-1$$ -> zde jsem část pravděpodobně udělal chybu.

$$L(5,3,2,\alpha)=\frac{\alpha}{5^{\alpha+1}}\cdot\frac{\alpha}{3^{\alpha+1}}\cdot\frac{\alpha}{2^{\alpha+1}}\quad(\log\alpha-(\alpha+1)\log 5)+(\log a-(\alpha+1)\log 3)+(\log\alpha-(\alpha+1)\log 2)$$

$$3\log\alpha-(\alpha+1)\cdot(\log 5+\log 3+\log 2)$$

$$3\cdot\log\alpha-(\alpha+1)\cdot\log(5\cdot 3\cdot 2)$$

derivace

$$\frac{3}{\alpha}-\log(30)\qquad \frac{3}{\alpha}=\log 30\ \to\ 3=\log 30\cdot\alpha\qquad \alpha=\frac{3}{\log 30}$$

X_1 -> poprvé padly 1 panny po sobě

$\hookrightarrow$ geometrické rozdělení -> $E(X)=\frac{1}{1/2}=2$

Nechť