Úkol - robot:

prob. dist: když se posunu na západ, chci všechny políčka v nejvýchodnějším sloupci nastavit na 0, protože tam určitě nejsem.

Markov Chain:

$X_1 \to X_2 \to X_3$

→ předpokládáme, že přechodový model se nemění v čase a že je závislý jen na svých předchůdcích

X_{t-1}	X_t	$P(X_t \mid X_{t-1})$
S	S	0,9
S	R	0,1
R	S	0,3
R	R	0,7

$$P(X_1 = S \mid X_0)$$

→ musím proiterovat všechny možnosti toho X_0 a násobit to danou pstí

$$P(X_1 = S) = P(X_1 = S \mid X_0) \cdot P(X_0)$$

$$= P(X_1 = S \mid X_0 = S) \cdot \boxed{P(X_0 = S)}$$

$$+ P(X_1 = S \mid X_0 = R) \cdot \boxed{P(X_0 = R)}$$

→ na tohle bych se ptal pro $t=0$:

$$P(X_0 = S)$$

$$P(X_3 = S) = P(X_3 = S \mid X_2 = S) \cdot P(X_2 = S) + P(X_3 = S \mid X_2 = R) \cdot P(X_2 = R)$$

$$= P(X_3 = S \mid X_2 = S)\big(P(X_2 = S \mid X_1 = S) \cdot P(X_1 = S) + P(X_2 = S \mid X_1 = R) \cdot P(X_1 = R)\big)$$

$$+ P(X_3 = S \mid X_2 = R)\big(P(X_2 = R \mid X_1 = S) \cdot P(X_1 = S) + P(X_2 = R \mid X_1 = R) \cdot P(X_1 = R)\big)$$

$$= 0{,}9 \cdot (0{,}9 \cdot 0{,}6 + 0{,}3 \cdot 0{,}4) = 0{,}594$$

$$+ 0{,}3 \cdot (0{,}1 \cdot 0{,}6 + 0{,}7 \cdot 0{,}4) = 0{,}102$$

$$= 0{,}696$$

$$a_0 = 0{,}5$$

$$a_n = \frac{3}{5} a_{n-1} + 0{,}3$$

$$f(x) = a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n$$

$$\frac{3}{5}x \cdot f(x) = 0 \quad \tfrac{3}{5}a_0 \quad \tfrac{3}{5}a_1 \quad \dots \quad \tfrac{3}{5}a_n$$

$$+ \frac{0{,}3}{1-x} \cdot x = 0 \quad 0{,}3 \quad 0{,}3 \quad \dots \quad 0{,}3$$

→ Celé je to tedy jen iterativní postup počítání pravděpodobnosti

$$f(x) = 0{,}6x \cdot f(x) + \frac{0{,}3x}{1-x}$$

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r] \arrow[d] & X_2 \arrow[r] \arrow[d] & X_3 \arrow[r] \arrow[d] & X_4 \arrow[d] \\
E_1 & E_2 & E_3 & E_4
\end{tikzcd}$$

4 tasky, co s tím můžu dělat?

- $P(X_t \mid E_{1:t})$ – filtrování
- $P(X_{t+1} \mid E_{1:t})$ – predikce
- $P(X_{t-1} \mid E_{1:t})$ – smoothing $\neq P(X_{t-1} \mid E_{1:t-1})$ → není to pozorování
- nejpravděpodobnější cesta k bodu X_t

$$P(X_t \mid E_{1:t}) = \alpha \cdot P(E_t \mid X_t) \cdot \sum_{X_{t-1}} \overbrace{P(X_t \mid X_{t-1})}^{\text{Markov assumption}} \cdot \underline{P(X_{t-1} \mid E_{1:t-1})}$$

↳ $\begin{tikzcd} X_t \arrow[d, "\text{přechod}"] \\ E_t \end{tikzcd}$

↳ z přechodového modelu

↳ prostor pro rekurzi

tomorrow

today	S	C	R
S	0,8	0,2	0
C	0,4	0,4	0,2
R	0,2	0,6	0,2

sensor model

weather	S	C	R
Sunny	0,6	0,4	0
cloudy	0,3	0,7	0
rainy	0	0	1

$P(X_1 = S) = 1$

$E_2 = C,\ E_3 = C,\ E_4 = R,\ E_5 = S$

$P(X_5 = S) = ?$

$$P(X_5=S \mid E_{2:5}) = \alpha_5 \cdot P(E_5=S \mid X_5=S) \cdot$$

$$\begin{aligned}\Big(\; & P(X_5=S \mid X_4=S) \cdot P(X_4=S \mid E_{2:4}) \\ + \; & P(X_5=S \mid X_4=R) \cdot P(X_4=R \mid E_{2:4}) \\ + \; & P(X_5=S \mid X_4=C) \cdot P(X_4=C \mid E_{2:4}) \\ \Big) \; & \end{aligned}$$

$$= \alpha_5 \cdot 0{,}6 \cdot \Big(0{,}8 \cdot P(X_4=S \mid E_{2:4}) + 0{,}2 \cdot P(X_4=R \mid E_{2:4}) + 0{,}4 \cdot P(X_4=C \mid E_{2:4})\Big)$$

$$= \alpha_5 \cdot 0{,}6 \cdot \left(0{,}8 \cdot 0 + 0{,}2 \cdot \left(\alpha_{4,2} \cdot 1 \cdot \left(\begin{aligned} & P(X_4=\overset{0}{R} \mid X_3=S) \cdot P(X_3=S \mid E_{2:3}) \\ + \; & P(X_4=\overset{0{,}2}{R} \mid X_3=C) \cdot P(X_3=S \mid E_{2:3}) \\ + \; & P(X_4=\overset{0{,}2}{R} \mid X_3=R) \cdot P(X_3=S \mid E_{2:3}) \end{aligned}\right)\right) + 0{,}4 \cdot 0\right)$$

$$\vdots$$

Smoothing

$$P(E_{t+1} \mid X_t) = \sum_{X_{t+1}} P(E_{t+1} \mid X_{t+1}) \cdot P(E_{t+2} \mid X_{t+1}) \cdot P(X_{t+1} \mid X_t)$$