Fib. posloupnost @

Důkaz:

- to, co plyne z předchozích kroků a z definice

Axiomy:

- první daná tvrzení, která není potřeba dokazovat. Většinou na ně dokazujeme vět.

Sporem / Indukcí:

Sporem:

- předpokládáme opak a dokážeme, že takový opak neexistuje

Prvočísel je nekonečně mnoho:

Sporem: Nechť $p_1 \cdots p_n$ jsou všechny prvočísla. Pak $p_1 \cdot p_2 \cdots p_n = F_n$. Pak $F_n + 1$ není dělitelné žádným menším prvočíslem, tedy je taky novým prvočíslem. $\boxed{\lightning}$

Indukcí:

$\forall n \in \mathbb{N} : \varphi(n)$

Dokážeme pro 0. Pak $\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1)$

$\forall n \in \mathbb{N} : 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Indukcí podle n:

$n = 0$

$2^0 = 2^1 - 1 \quad \boxed{\checkmark}$

$n \Rightarrow n+1$

Využití indukčních předpokladů.

$$\underbrace{2^0 + 2^1 + \dots 2^n}_{2^{n+1}-1} + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1$$

$$2 \cdot 2^{n+1} = 2^{n+2} \quad \boxed{\checkmark}$$

Definice čísel:

$\lfloor x \rfloor$ -> „dolní celá část" = nejbližší nižší celé číslo $\lfloor 1,3 \rfloor = 1$ $\lfloor -1,3 \rfloor = -2$

$\lceil x \rceil$ -> „horní celá část" = nejbližší vyšší celé číslo $\lceil 1,3 \rceil = 2$

... -> „pokračování seznamu"

Suma -> $\sum_{i=1}^{n} 2^i$ -> iterační suma $\quad \sum i^2 \mid 1 \leq i \leq n \;\&\; i$ je prvočíslo -> suma s podmínkou

$$\sum_{i \in \{1,2,5\}} \frac{1}{i} \qquad \sum_{i \in \emptyset} = 0$$

Suma součinu -> $\prod_{i=1}^{n} i = n!$, $\prod_{i=1}^{n} x = x^n$

Množiny:

$\{1,2,5\} = \{1,2,2,2,5,5\}$

$\{\} = \emptyset \neq \{\emptyset\}$

Mohutnost / kardinalita: počet prvků

$\mathbb{N}$ (přirozená čísla), $\mathbb{Z}$ (celá čísla), $\mathbb{Q}$ (racionální čísla), $\mathbb{R}$ (reálná čísla), $\mathbb{C}$ (komplex)

Operace na Množině:

$x \in A$ - je prvkem, $A = A$

$A \subseteq B \quad \forall a: x \in A \Rightarrow x \in B$

$A \subset B$

$A \cap B : \{x \mid x \in A \;\&\; x \in B\}$

$A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$

$$A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Potence množiny $P(A) = 2^A$

$$|P(A)| = 2^{|A|} \qquad P(A) := \{B \mid B \subseteq A\}$$

Věta: Neexistuje množina všech množin.

Sporem: Nechť taková množina M existuje

$U := \{x \in M \mid x \notin x\}$ všechny krotké množiny

- U je krotká: $U \notin U \Rightarrow U \in U$
- U je divoká: $U \in U \Rightarrow U \notin U$

$\Rightarrow \boxed{↯}$

Uspořádaná dvojice (x, y)

Kartézský součin $A \times B$

$:= \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$

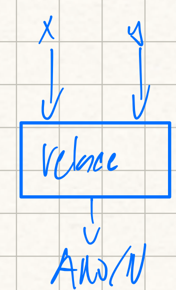
$\{1\} \times \{\alpha, \beta\} = \{(1,\alpha), (1,\beta)\}$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ rovina

$(a,b,c) = ((a,b),c) = (A \times B) \times C \Rightarrow$ neplatí asociativita

Kartézská mocnina $A^n := \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n}$

Relace mezi množinami X, Y $\Rightarrow$

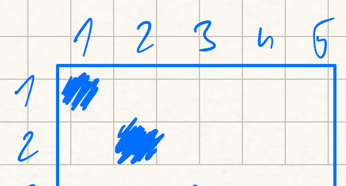


- relace mezi podmnožinami je podmnožina $X \times Y$
  - v $X \times Y$ jsou obsaženy všechny vzájemné vztahy mezi X a Y

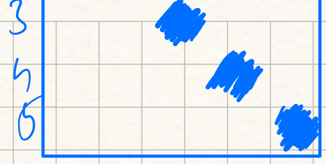
Relace na X $\equiv$ mezi X a X

Příklady na $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

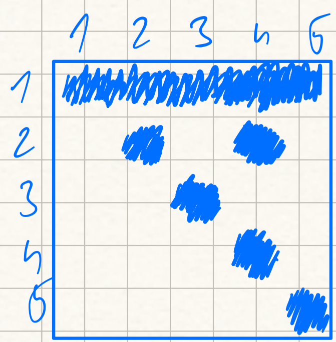
① $x = y \Rightarrow \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$



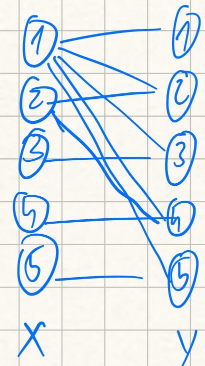
- diagonální relace $D_X = \{(x,x) \mid x \in X\}$



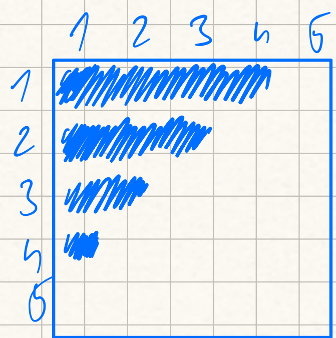
② dělitelnost $D ::= (x,y) \in D \equiv x | y \quad (xDy)$



nebo



③ $xRy \equiv x + y \leq 5$



④ $\emptyset$ → nie vybarvení

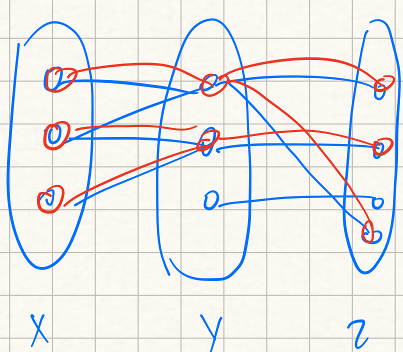
⑤ X^2 univerzální relace → všechno vybarvení

Inverzní relace k R mezi X a Y je R^{-1} mezi Y a X:

$$xRy \equiv yR^{-1}x$$

Skládání relací R mezi X a Y, S mezi Y a Z

je relace $R \circ S$ mezi X a Z t.ž. $xTz \equiv \exists y \in Y: xRy \ \& \ ySz$



Vlastnosti:

Nejsou komutativní: $R \circ S$ a $S \circ R$ jsou obecně různé

$R \circ D_Y = R$

$\Delta_X \circ R = R$

f je funkce/zobrazení z X do Y ($f: X \to Y$)

↳ f je relace mezi X a Y t.ž. $\forall x \in X\ \exists! y \in Y: x f y$

$$f(x) = y \equiv x f y$$

$$f[S] := \{ f(s) \mid s \in S \}$$

Příklady:

1. identita (diagonála) $f(x) = x$ $\quad \Delta_X \quad f: X \to X$
2. $\sin: \mathbb{R} \to [-1, 1]$
3. $\operatorname{sgn}: \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ $\quad$ ($x<0$ | $x=0$ | $x>0$)
4. $\operatorname{card}: 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$
5. $f(x, y) = a \quad f: X \times Y \to A$

Vlastnosti:

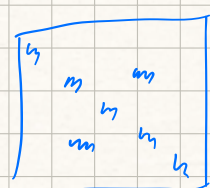
Funkce f z X do Y je:

- prostá $\equiv \forall x, x' \in X,\ x \neq x': f(x) \neq f(x')$
- „na" $\equiv \forall y \in Y\ \exists x \in X: f(x) = y$ $\quad$ - Y je plně zaplněno
- bijekce $\equiv \forall y \in Y\ \exists! x \in X: f(x) = y$

Mějme f a g funkce.

Pak $f \circ g$ je opět funkce: $g(f(x))$

Nechť R je relace na X. Potom R je:



diagonála

- $\Delta_X \subseteq R$ • reflexivní $\equiv \forall x \in X: x R x$
- $R = R^{-1}$ • symetrická $\equiv \forall x, y \in X: x R y \Rightarrow y R x$

- antisymetrická $\equiv \forall x,y \in X: xRy \;\&\; yRx \Rightarrow x=y$
  - takže to nastane protějšky jen na diagonále

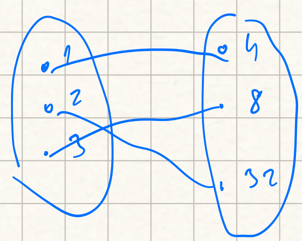
$R \circ R \subseteq R$ • tranzitivní $\equiv \forall x,y,z \in X: xRy \;\&\; yRz \Rightarrow xRz$

Ekvivalence:

relace R na X je ekvivalence, jakmile je reflexivní, symetrická a tranzitivní

① $\mathbb{N}, =$ ② $xRy \equiv 7 \setminus x-y$ ③ shodnost trojúhelníků v rovině

④ $2^{\mathbb{N}}$



$ARB \equiv \exists f: A \to B$, která je bijekce

Ekvivalenční třídy:

Nechť R je ekvivalence na X. $R[x] := \{y \in X \mid xRy\}$

$x \in X$ ekvivalenční třída prvku x

V rámci ekvivalence je každé číslo v právě jedné ekv. třídě.

Ekvivalence rozdělí na disjunktní podmnožiny ekvivalenčních tříd.

Věta o ekvivalenčních třídách:

Pro každou ekvivalenci R na X:

① $\forall x \in X: R[x] \neq \emptyset$ $\quad x \in R[x]$ Důkaz ① - identita

② $\forall x,y \in X: R[x] = R[y] \vee R[x] \cap R[y] = \emptyset$ disjunkce podmnožin

③ $\{R[x] \mid x \in X\}$ jednoznačně definuje R (*)

Důkaz ③ $y \in R[x] \Leftrightarrow xRy \Leftrightarrow yRx \Leftrightarrow x \in R[y]$

symetrie ekv. → množina jednotlivých tříd

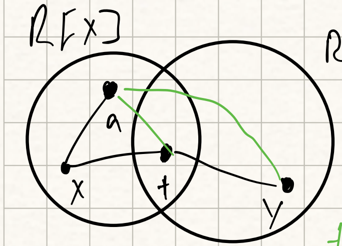
$xRy \Leftrightarrow \exists A \in \{\ldots\}$ (*), $\{x,y\} \subseteq A$

Důkaz ② $R[x] \cap R[y] \neq \emptyset$, → pak symetrie $\subseteq \supseteq \to =$

pak $R[x] = R[y]$ (stačí $R[x] \subseteq R[y]$)

Chceme: $\forall a \in R[x] : a \in R[y]$ $\quad xRa$ (symetrie) $\to aRx$

Víme: $\exists t \in R[x] \cap R[y] \to xRt, yRt$



aRy, tedy $a \in R[y]$

aRt (symetrie) tRa

a je prvkem $R[y]$ $\leftarrow$ yRa

Rozklad množiny:

$\mathcal{Y}$ je rozklad množiny X $\equiv$

1. $\mathcal{Y} \subseteq 2^X$
2. $\emptyset \notin \mathcal{Y}$
3. $\forall A, B : A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$
4. $\bigcup_{A \in \mathcal{Y}} A = X$

Relace R na X je (částečné) uspořádání $\equiv$

R je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní

Částečně uspořádaná množina $(X, \preceq)$

- $\to$ x, y jsou porovnatelné $\equiv$ $x \preceq y \lor y \preceq x$
- $\to$ $\preceq$ je lineární $\equiv$ $\forall x, y \in X$: x a y jsou porovnatelné
- $\to$ ostré uspořádání $\equiv$ $\prec$ na X: $x \prec y \equiv x \preceq y \;\&\; x \neq y$

Příklady:

1. $(\mathbb{Z}, \leq)$ lineární
2. $(\mathbb{Q}, \leq)$ lineární
3. (X, Δ_X)
4. $(\mathbb{Z}^+, \backslash)$ částečné (dělitelnost)
5. $(2^X, \subseteq)$

6. Lexikografické

Nechť $(X, \leq)$ je lineární uspořádané.

$(X^2, \leq_{lex})$: $(a_1, a_2) \leq_{lex} (b_1, b_2)$

$\Downarrow$ je lineární $\qquad \Leftrightarrow \; a_1 < b_1 \vee a_1 = b_1 \;\&\; a_2 \leq b_2$

$(X^n, \leq^n_{lex})$ $\quad (a_1 \dots a_n) \leq^n_{lex} (b_1 \dots b_n)$ $\quad$ rekurzivně

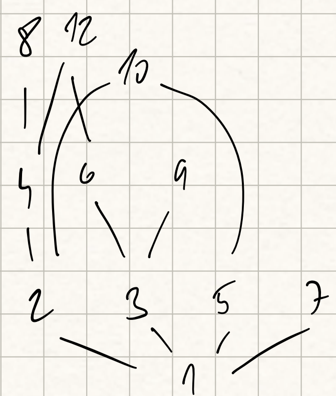
$\Leftrightarrow \; a_1 < b_1 \vee a_1 = b_1 \;\&\; (a_2 \dots a_n) \leq^{n-1}_{lex} (b_2 \dots b_n)$

Relace bezprostředního předchůdce: $\triangleleft$ na X

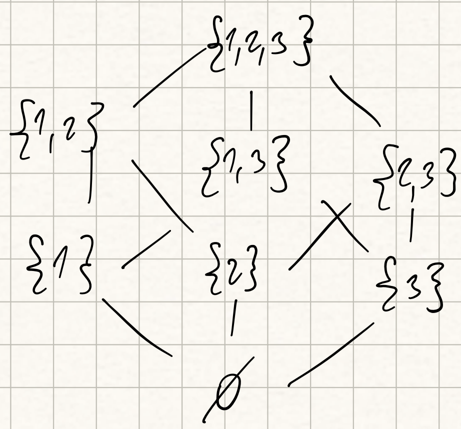
$x \triangleleft y \equiv x < y \;\&\; \nexists z: x < z < y$

Hasseův diagram:

$(\{1 \dots 12\}, \backslash)$



$(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$



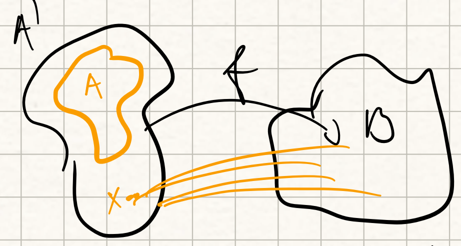
Nejmenší prvek $x \equiv \forall y \in X: x \leq y$

Minimální prvek $x \equiv \nexists y \in X: y < x$

Stejně největší a maximální

Řetězec $\equiv \forall a, b \in A$ porovnatelné

Antiřetězec $\equiv \forall a, b \in A: a \neq b$ neporovnatelné



$a = |A|$ $\qquad$ $b = |B| \geq 1$

$\# f: A \to B$

$\# b^a$

$\# f: A \to B = b^a$

Dk: podle a:

① $a = 0$

$\# f = 1 = b^0$ $\boxed{\checkmark}$

② $a \to a+1$ Nechť A' je $(a+1)$ prvková

zvolíme $x \in A'$

položíme $A := A' \setminus \{x\}$

Funkce $f': A' \to B$ je určena:

① $f'(x)$ ... b možností

② $f := f' \restriction A$ $\quad f: A \to B$ ... b^a

Celkem b^{a+1} možností $\boxed{\checkmark}$

$[n] := \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

alternativně

$\# f: [a] \to [b] = b^a$

N-prvková množina má 2^n podmnožin

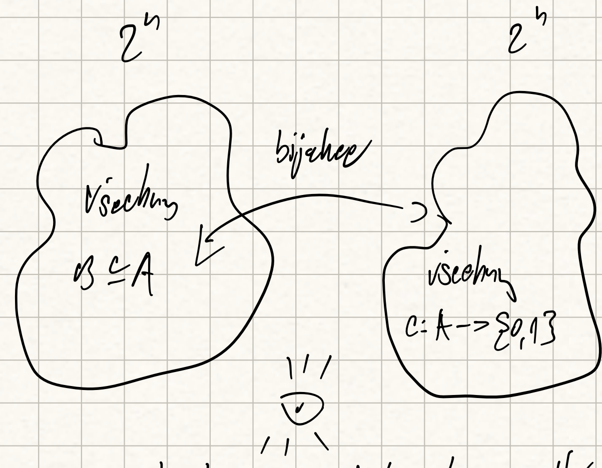
nebo: $|2^{[n]}| = 2^n$

<u>Charakteristická funkce podmnožiny</u>

Pro $B \subseteq A$ def: $C_B: A \to \{0,1\}$

$$\forall a \in A: C_B(a) := \begin{cases} 0 & a \notin B \\ 1 & a \in B \end{cases}$$

Důkaz: Jelikož mám bijekci mezi C_B a $B \subseteq A$, mají stejný počet prvků. U C_B je počet 2^n, jelikož u každého mám možnost pouze 0/1



bijekce musí být stejně velké

Pro $n > 0$ je $|\mathcal{S}| = |\mathcal{L}| = 2^{n-1}$

$\mathcal{S} := \{A \subseteq [n] \mid |A| \text{ je sudá}\}$

$\mathcal{L} := \{A \subseteq [n] \mid |A| \text{ je liché}\}$

Důkaz:

① $|\mathcal{S}| = |\mathcal{L}|$ – vytvořit bijekci

$f: \mathcal{S} \to \mathcal{L}$ $\quad f(S) := S \triangle \{k\}$ $\quad k \in [n]$ zvolené pevné

$f^{-1} = f$, tedy je bijekce

② $|Y| + |\underline{Y}| = 2^n$

$\#f: [a] \to [b]$ prostých $= \underbrace{b \cdot (b-1) \cdot \ldots \cdot (b-a+1)}_{a \text{ členů}}$

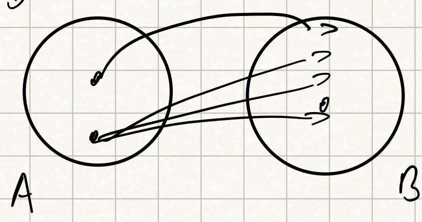
pro 1. a $\to b$

pro 2. a $\to b-1$

$\vdots$

pro poslední a $\to 1$

Dk: $b-1$



$\to = b^{\underline{a}}$ (klesající mocnina)

$b^{\underline{0}} = 1$

$f: [k] \to A \xhookrightarrow{\text{bijekce}} A^k$

$\#f = |A|^k$

↳ & jsou prosté ↳ & bez opakování

Permutace na $A^{|A|=a}$ $\to f: A \xrightarrow[\text{bijekce}]{} A$

$\#f = a^{\underline{a}} = a!$

↓

lineární uspořádání (pořadí)

$f: [a] \to A$ bijekce

$\#f = a^{\underline{a}} = a!$

Neuspořádané k-tice z A ($|A| = a$)

$\Updownarrow$ jako k-prvkové podmnožiny

Počet k-prvkových podmnožin a-prvkové množiny je $\frac{a^{\underline{k}}}{k!}$

Dk: (počítání dvěma způsoby)

$\to$ # uspořádaných k-tic bez opakování $= a^{\underline{k}}$ $\to$ prosté funkce $[k] \to [a]$

(# k-prvkových podmnožin) $\cdot$ (# počet uspořádání k prvků) $= (?) \cdot (k!) = a^{\underline{k}}$

$\downarrow$

$\frac{a^{\underline{k}}}{k!}$

Toto lze i pomocí char. funkcí:

$\boxed{10010011110000110011}$

k - jedniček

$\binom{n}{k}$ kombinační číslo / binomický koeficient

$$:= \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \quad \text{pro } 0 \le k \le n \quad \to \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

význam: „Kolik k-prvkových podmnožin má n-prvková množina"

$$\binom{A}{k} := \{ B \subseteq A \mid |B| = k \} \qquad \binom{|A|}{k} = \left|\binom{A}{k}\right|$$

Vlastnosti kombinačních čísel:

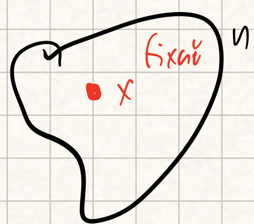
$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$$

$$\binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$ bijekce $(n-k)$ podmnožina je jednoznačně určena k množinou.

$\Leftrightarrow$ je jednoznačně určena tím, co jsem do ní nedal!

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$ → počet všech podmnožin



$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$\binom{n-1}{k}$ → k-prvkové podmnožiny neobsahující x

$\binom{n-1}{k-1}$ → $k-1$ prvkové podmnožiny obsahující x (obsahují totiž $k-1$ prvků z $n-1$ velké množiny)

Pascalův trojúhelník:

$k=0$ $\quad k=1$ $\quad k=2$ $\quad k=3$

$\binom{0}{0}$ 1 — $n=0$

$\binom{1}{0}$ 1 — $\binom{1}{1}$ 1

$\binom{2}{0}$ 1 — $\binom{2}{1}$ 2 — $\binom{2}{2}$ 1 — $n=2$

$\binom{3}{0}$ 1 — $\binom{3}{1}$ 3 — $\binom{3}{2}$ 3 — $\binom{3}{3}$ 1 — $n=3$

$k=n-3$ $\quad k=n-2$ $\quad k=n-1$ $\quad k=n$

Binomická věta:

$$\forall a,b \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}:\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Důkaz:

$$\underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}_{n} \to \binom{n}{k} a^{n-k}\cdot b^k$$

vybírám si, kolikrát „b-čko" budu vynásobovat

a to všechny kolikrát kolikrát si z n-závorek můžu vybrat k béček. (ze kterých použiju b-čko)

Praktické důsledky:

$a=b=1$

$$2^n=(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 1$$

$a=1,\ b=-1$

$$0=(1-1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$$

sudých a lichých množin je stejně

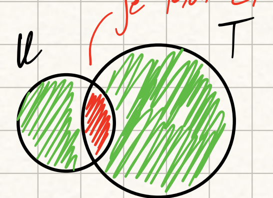
$$0=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\binom{n}{4}\ldots$$

T - $|T|=11$

K - $|K|=7$

E - $|E|=5$

$$T+K=|T|+|K|-|T\cap K|$$

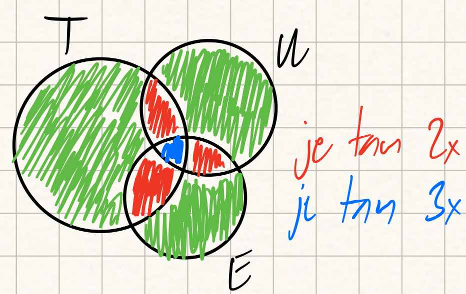


$|T\cap K|=4$

$|T\cap E|=2$

$|K\cap E|=3$

$|T\cap K\cap E|=1$



PIE

$$\underline{|T\cup E\cup K|}=|T|+|E|+|K|-|T\cap K|-|T\cap E|-|K\cap E|+|T\cap K\cap E|$$

Princip inkluze a exkluze:

Nechť $A_1 - A_n$ jsou konečné množiny. Potom:

$$\boxed{\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I\in\binom{[n]}{k}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|}$$

Alternativně:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset\neq I\subseteq[n]} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$$

<u>Důkaz #1:</u>

- kolikrát každý prvek přispěje do L a R.

Uvažme $a \in \bigcup_i A_i$

Nalevo přispěje 1

Napravo přispěje ?

Nechť a patří do právě p množin A_i.

průniky k-tic:
- $k > p$: $a \notin \bigcap$ — alespoň v jedné množině není, není tedy v průniku
- $k = p$: $(-1)^{k+1}$
- $k < p$: $(-1)^{k+1} \cdot \binom{p}{k}$ — v kolika celkem podmnožinách může být.

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} \cdot \binom{p}{k} = \binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \binom{p}{3} - \binom{p}{4} + \dots - \dots + (-1)^{k+1} \cdot \binom{p}{p} = (*)$$

podle Binomické věty: $0 = (1-1)^p = \binom{p}{0} - \binom{p}{1} + \binom{p}{2} - \dots + \dots + (-1)^{p} \cdot \binom{p}{p}$

$= 1 - (*)$ $\quad\Rightarrow (*) = 1$

Charakteristická funkce C_X

$$C_X(a)\begin{cases}0\\ 1 & \text{pro } a\in X\end{cases}$$

$$C_X\cdot C_Y=C_{X\cap Y}$$

$$\overline{X\cup Y}=\overline{X}\cap\overline{Y}$$

$$A:=\bigcap_i A_i$$

$$\sum_{a\in A} C_X(a)=|X|$$

$$C_{\overline{X}}=1-C_X$$

pro $X\subseteq A$: $C_X: A\to\{0;1\}$

$$1-C_{X\cup Y}=(1-C_X)\cdot(1-C_Y)$$

Důkaz #2:

$x_1 - x_n$ jsou proměnné:

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)=\sum_{I\subseteq[n]}\prod_{i\in I}x_i \;\to\; \underbrace{\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)}_{}=\sum_{I\subseteq[n]}(-1)^{|I|}\underbrace{\prod_{i\in I}x_i}_{C_{\bigcap_{i\in I}A_i}}$$

$$x_i:=C_{A_i}$$

$$1-C_{\bigcup_i A_i}$$

$$\to \underbrace{\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)}_{}=\sum_{\emptyset\neq I\subseteq[n]}(-1)^{|I|}\underbrace{\prod_{i\in I}x_i}_{C_{\bigcap_{i\in I}A_i}}+1$$

$$x_i:=C_{A_i}$$

$$1-C_{\bigcup_i A_i}$$

$$\to \cancel{1}-C_{\bigcup_i A_i}=\left(\sum_{\emptyset\neq I\subseteq[n]}(-1)^{|I|+1}\cdot C_{\bigcap_{i\in I}A_i}\right)+\cancel{1}$$

$$\underbrace{\sum_a C_{\bigcup_i A_i}(a)}_{\left|\bigcup_i A_i\right|}=\sum_{\emptyset\neq I\subseteq[n]}(-1)^{|I|+1}\underbrace{\sum_a C_{\bigcap_{i\in I}A_i}(a)}_{\left|\bigcap_{i\in I}A_i\right|}$$

Šatnářka:

$$S_n := \{ \pi \mid \pi \text{ je permutace na } [n] \}$$

$\pi(i) = i$ —> pevný bod (hodnota, pro kterou to vrátí tu stejnou hodnotu.

$$\check{S}_n := \left| \{ \pi \in S_n \mid \nexists i : \pi(i) = i \} \right|$$ → tedy že tam neexistuje pevný bod

$$P[\text{nikdo nedostane svůj klobouk}] = \frac{\check{S}_n}{|S_n|} = \frac{\check{S}_n}{n!}$$

Budeme počítat s alespoň jedním pevným bodem:

$$A := \{ \pi \in S_n \mid \exists i : \pi(i) = i \}$$

$$A_i := \{ \pi \in S_n \mid \pi(i) = i \} \qquad A = \bigcup_i A_i$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

$$|A_i| = (n-1)!$$

$$|A_i \cap A_j| = (n-2)!$$

$$|A| = \left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \cdot (n-k)!$$

$$= n! \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$$

$$\check{S}_n = n! - |A| = n! \left(\cancel{1} \sum_{k=\cancel{1}0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \right)$$

$$\check{S}_n = n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Odhad faktoriálu:

$1\cdot 1 \cdot 2\cdot 2 \cdot 3\cdot 3 \cdots n\cdot n$

① $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$

② $n^{n/2} \overset{①}{\leq} n! \overset{②}{\leq} \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

$$(n!)^2 = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdots n^2$$
$$= (1\cdot n)\cdot(2\cdot(n-1))\cdot(3\cdot(n-2)) \_\_ \cdot (n\cdot 1)$$
$$n! = \sqrt{1\cdot n}\cdot \underbrace{\sqrt{\underbrace{2(n-1)}_{\geq n}}}_{\geq \sqrt{n}} \cdot \sqrt{3(n-2)} \cdots \sqrt{n\cdot 1}$$

proč pod odmocninou $\geq n$?

$i\cdot(n-i+1)$

$i=1 \Rightarrow n$

$i=n \Rightarrow n$

ostatní $\Rightarrow$ min ≥ 2, max $\geq \frac{n}{2}$

součet tedy $2\cdot\frac{n}{2} = n$

① $\overset{\shortparallel}{n^{\frac{1}{2}}}$ – těch je n, tedy $n^{\frac{n}{2}}$

$$\sqrt{2(n-1)} \leq \frac{n+1}{2}$$

② podle AG nerovnosti:

$$\sqrt{2(n-1)} \leq \frac{2+n-1}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Věta AG nerovnost:

Pro $x,y>0$

$$\sqrt{x\cdot y} \leq \frac{x+y}{2}$$

Důkaz:

$$0 \leq (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$
$$2ab \leq a^2+b^2$$
$$ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$$

$a := \sqrt{x}$

$b := \sqrt{y}$

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt{y} = \sqrt{x\cdot y} = \frac{x+y}{2} \quad \boxed{\checkmark}$$

$$n^{n/2} \overset{①}{\leq} n! \overset{②}{\leq} \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

$$\frac{1}{2}n\log n \leq \log n! \leq n\cdot \underbrace{\log\frac{n+1}{2}}_{\log n}$$

$\left(\frac{n+1}{2}\right)$ je nejvýš n, tedy

$$\frac{1}{2}n\log n \leq \log n! \leq \log n$$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{\log n! \text{ je } \Theta(n\log n)}}$

Odhad kombinačního čísla:

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq n^k$$

$$\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 1}$$

$$\binom{7}{4} = \frac{7}{4}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{1}$$

1,75 2 2,5 4

$$\frac{n}{k} \leq \frac{n-1}{k-1}$$

$$n\cdot(k-1) \leq (n-1)\cdot k$$

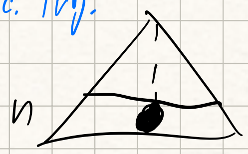
$$nk-n \leq nk-k$$

$$n \geq k \quad \boxed{\checkmark}$$

To je u každého komb. čísla!

Odhad $\binom{2n}{n}$

- odhad maxima z řádku Pasc. troj.



$$\frac{4^n}{2n+1} \leq \binom{2n}{2} \leq 4^n$$

min ≤ průměr ≤ max

součet v řádku je 2^n

$\max \leq \Sigma$

Konec kombinatoriky!

Grafy

Graf je (V, E), kde:

- V konečná neprázdná množina vrcholů
- $E \subseteq \binom{V}{2}$ → „množina některých dvouprvkových podmnožin V" je množina hran.

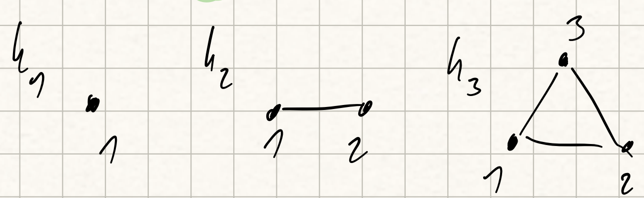
G, $V(G)$, $E(G)$

graf, jeho hrany, jeho vrcholy

Rozšíření:

- orientace hran
- smyčky
- multigrafy
- nekonečné grafy
- ohodnocený graf

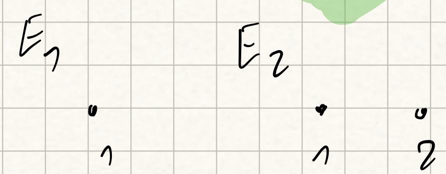
Úplný graf K_n



$V(K_n) := [n]$

$E(K_n) := \binom{V(K_n)}{2}$

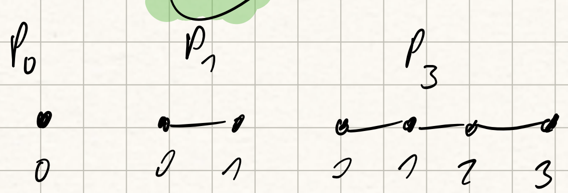
Prázdný graf E_n



$V(E_n) := [n]$

$E(E_n) := \emptyset$

Cesta P_n



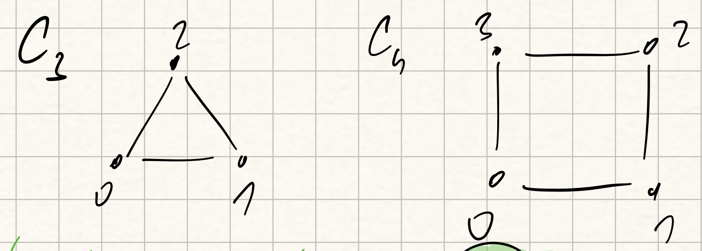
$V(P_n) := [n]$

$E(P_n) := \{\{i, i+1\} \mid 0 \le i < n\}$

Kružnice C_n

$V(C_n) := [n-1]$

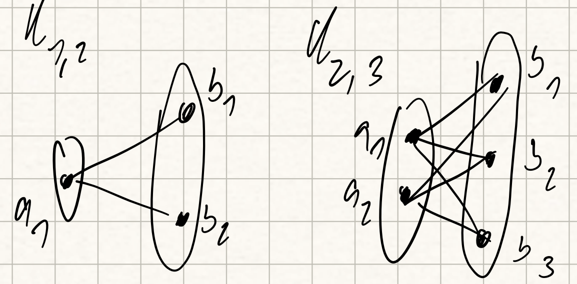
$E(C_n) := \{\{i, (i+1) \bmod n\} \mid 0 \le i < n\}$



Úplný bipartitní graf $K_{m,n}$

$V(K_{m,n}) := \{a_1 \dots a_m\} \cup \{b_1 \dots b_n\}$

$E(K_{m,n}) := \{\{a_i, b_j\} \mid 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$



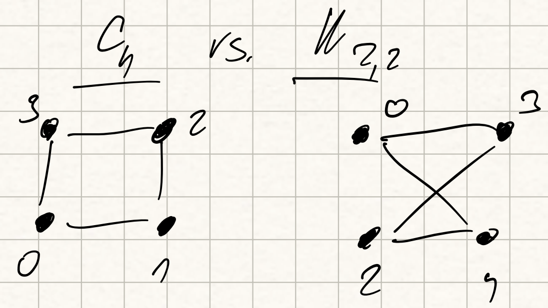
Graf (V,E) je bipartitní ≡

$\exists V_1, V_2$ rozklad V t.ž. $E \subseteq \{\{a_1, a_2\} \mid a_1 \in V_1, a_2 \in V_2\}$ nebo $\forall e \in E: |e \cap V_1| = 1$

$V_1 \cap V_2 = \emptyset$

$V_1 \cup V_2 = V$

partita grafu není jednoznačně určena!



Co je bipartitní graf?

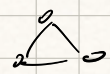
- Všechny sudé kružnice
- Všechny cesty
- Všechny prázdné grafy
- Úplný graf - K_1, K_2, ostatní už ne.

Isomorfismus mezi grafy: Grafy (V,E) a (V',E') jsou isomorfní ≡

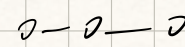
$\exists f: V \xrightarrow{\text{bijekce}} V'$ t.ž. $\forall a,b \in V: \{a,b\} \in E \iff \{f(a), f(b)\} \in E'$

Značí se $G \cong G'$ - chová se jako ekvivalence na libovolné množině grafů

Příklady isomorfismů:

$C_3 \cong K_3$ 

$K_{1,1} \cong P_1 \cong K_2$ 

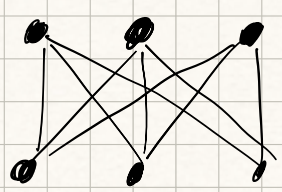
$P_2 \cong K_{1,2}$ 

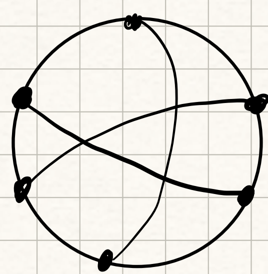
$C_4 \cong K_{2,2}$

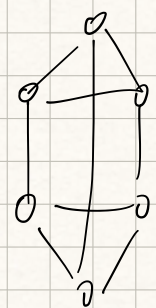
$E_1 \cong P_0 \cong K_1$

$K_{3,3} \cong H \not\cong K_5$ – nesedí počet vrcholů

$\not\cong K_6$ – nesedí počet hran





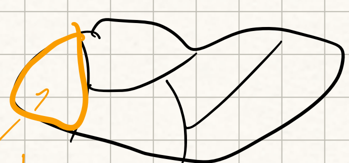


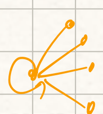
- takhle není, protože v tom jsou trojúhelníky, které nejsou bipartitní.

$\#$ grafů na $[n]$ ← vrcholy

$= 2^{\binom{n}{2}}$ → mám $\binom{n}{2}$ dvojic vrcholů a u každé se rozhodnu, zda bude mezi nimi hrana

$\#$ neisomorfních grafů na $[n]$





$\le n!$

bijekce

↘ každá třída obsahuje nejvýše $n!$ podgrafů

$$\frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!} \le \#\text{ neisomorfních grafů na } [n] \le 2^{\binom{n}{2}}$$

resp. počet těch tříd

$$\sum_{v \in V(G)} \deg_G(v) = 2|E(G)|$$

Stupeň vrcholu $v \in V(G)$:

je $\deg_G(v) := |\{e \in E(G) \mid v \in e\}|$

Princip sudosti:

$\#$ vrcholů lichého stupně je sudý, resp. součet všech stupňů je vždy sudý

Regularita grafu / graf je k-regulární $\equiv$

$\forall v \in V(G): \deg_G(v) = k$

– isomorfismus zachovává množinu všech stupňů grafu

Skóre grafu:

Posloupnost stupňů vrcholů

Graf $G'(V', E')$ je podgrafem $G(V,E)$ $G' \subseteq G \equiv$

$V' \subseteq V$ & $E' \subseteq \binom{V'}{2}$ $\longrightarrow$ $\subseteq$ na množině grafů je uspořádání

Indukovaný graf $G[V']$ je graf indukovaný množinou $V' \subseteq V(G)$:

$= (V', E')$, kde $E' = E(G) \cap \binom{V'}{2}$ $\longrightarrow$ podgraf, který obsahuje všechny možné hrany z původního grafu.

Cesta v grafu $G \equiv$

$G' \subseteq G$ t.ž. $\exists n : P_n \cong G'$

Nebo:

$(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n)$, kde $v_0 - v_n$ jsou navzájem různé vrcholy G

a $\forall_i \; e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$

Kružnice v grafu $\equiv$

1. $G' \cong C_n$
2. výjimka: $v_0 = v_n$ & ≥ 3

Souvislý graf G je souvislý $\equiv$

$\forall u,v \in V(G)$ $\exists$ cesta v G mezi u,v

Komponenty souvislosti jsou podgrafy indukované ekv. třídami relace $\sim$.

- komponenty jsou souvislé
- graf je souvislý, pokud má jednu komponentu.

Dosažitelnost v grafu:

Relace $\sim$ na $V(G)$:

$u \sim v \equiv \exists$ cesta v G mezi u,v

Lemma: $\sim$ je ekvivalence

Důkaz:

$\forall_u : u \sim u$

$\forall_{u,v} : u \sim v \iff v \sim u$

$\forall_{u,v,w} : u \sim v \;\&\; v \sim w \implies u \sim w$

Podle lemmatu: $\longrightarrow$

můžu cesty vystříhnout, tedy pokud existuje „cyklus", vynechám ho a mám cestu.

Sled v grafu: (vrcholy/hrany se smí opakovat)

$(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2 - e_n, v_n)$

kde $v_0 - v_n \in V(G)$ a $\forall i: e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$

existuje uzavřený/otevřený

$v_0 = v_n$ $\quad v_0 \neq v_n$

Lemmátko:

∃ sled mezi u,v <=> ∃ cesta mezi u,v

Dk: Pokud se nějaký vrchol t objeví alespoň 2krát:

$$(v_0, e_1, v_1, e_i, \underset{t}{\underset{\|}{v_i}}, e_{i+1} \dots e_j, \underset{t}{\underset{\|}{v_j}}, e_{j+1}, \dots e_n, v_n)$$

$$S' := (v_0, e_1, v_1, e_i, v_i, e_{j+1}, \dots e_n, v_n)$$

opakuji, dokud existuje nějaký vrchol 2x. Pak dostanu cestu.

Matice sousednosti $A(G)$

grafu G s vrcholy $\{v_1 - v_n\} = V(G)$ je matice $n \times n$

$$\forall i,j: A_{ij} = \begin{cases} 0 & \\ 1 & \{v_i, v_j\} \in E(G) \end{cases}$$

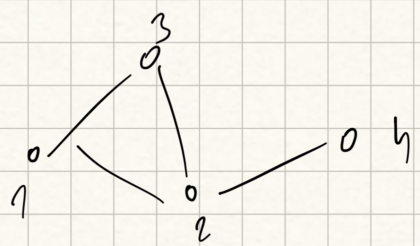
A je symetrická

$$\forall i: \sum_j A_{ij} = \deg(v_i)$$

$$A_{ij} = [\{v_i, v_j\} \in E(G)]$$ → indikátor

→ tohle se dá taky napsat na indikátory

$$A^2_{ij} = \sum_k A_{ik} \cdot A_{kj}$$ = # sledů délky 2 z v_i do v_j.



$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} \cdot & 1 & 1 & \cdot \\ 1 & \cdot & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\sum_i \frac{A^3_{ii}}{6} = \text{\# trojúhelníků}$$

z každého vrcholu vedou 2 cesty, kudy jít...

A^t_{ij} = # sledů délky t z v_i do v_j

Důkaz: $t=0$ $\quad A^0 = I_n$

① $t=1$ $\quad A^1 = A$

② Nechť t -> pak $t+1$:

$$A^{t+1}_{ij} = (A^t \cdot A)_{ij} = \sum_k A^t_{ik} \cdot A_{kj}$$

počet sledů délky t z v_i do v_k.

tedy počet sledů délky $t+1$, kdy jejich poslední hrana vede do v_j.

Vzdálenost v souvislém grafu G je:

$d_G : V(G)^2 \to \mathbb{N}$ t.ž. $\forall u,v \in V(G): d_G(u,v) :=$ minimum z délek cest mezi u,v

Vlastnosti:

1. $d(u,v) \geq 0$
2. $d(u,v) = 0 \iff u = v$
3. $d(u,v) = d(v,u)$
4. $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$ → trojúhelníková nerovnost

Vlastnosti metriky

Operace s grafy

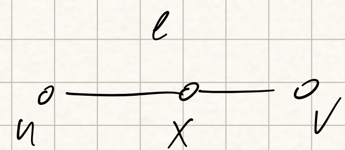
$G + v$ přidání vrcholu: $V' = V \cup \{v\}$, $E' = E$

$G + e$ -||- hrany

$G - v$ smazání vrcholu $G[V(G) \setminus \{v\}]$

$G - e$ -||- hrany

$G \% e$ dělení hrany

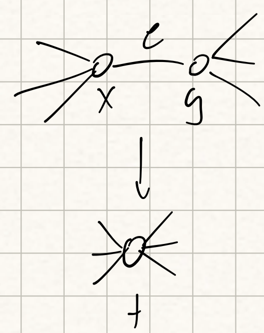


→ přidání vrchol x

↳ $G - e + x + \{u,x\} + \{x,v\}$

$x \in V(G)$

G/e kontrakce hrany



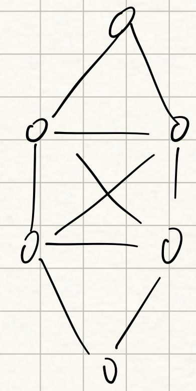
$G/e = \{x,y\} := G' = (V', E')$

t.ž. $V' = V \setminus \{x,y\} \cup \{t\}$

kde $t \in V$

$E' = \left(E \cap \binom{V'}{2}\right) + \{\{v,t\} \mid v \in V \,\&\, (\{v,x\} \in E \vee \{v,y\} \in E) \,\&\, v \neq x,y\}$

Tah je sled bez opakování hran.



Eulerovský tah

- obsahuje všechny vrcholy a hrany
- uzavřený eul. tah → vše výše + skončím tam, kde jsem začal.

Eulerovský graf ≡

existuje v něm uzavřený eulerovský tah

Eulerova věta:

Graf G je Eulerovský $\iff$ G je souvislý & $\forall v \in V(G): \deg_G(v)$ je sudý

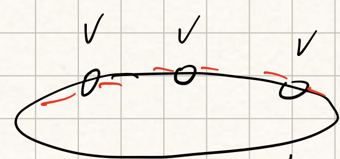
Důkaz:

$\Rightarrow$: (1) G je souvislý: mějme vrcholy u,v

$T :=$ část eul. tahu mezi jakýmikoli návštěvami u,v

$\exists$ sled mezi u,v $\Rightarrow$ $\exists$ cesta mezi u,v

(2) G má sudé stupně

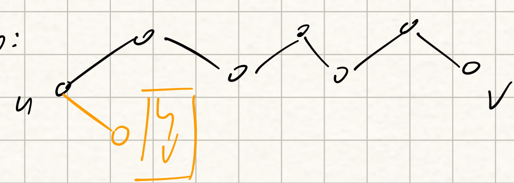


- každý výskyt v musí mít okolo sebe dvě hrany. Tyto hrany budou odlišné, jinak by šlo o smyčky a ty jsou zakázané.

$\Leftarrow$: Nechť T je tah s max # hran.

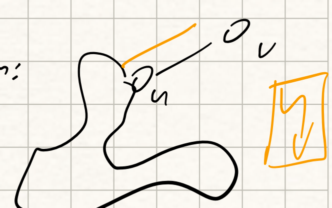
(1) T je uzavřený: Sporem:

- každý otevřený můžu ještě prodloužit.

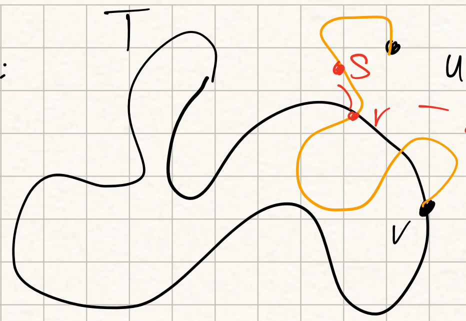


(2) Pokud $\{u,v\} \in E$, $u,v \in T$, pak $\{u,v\} \in T$: Sporem:

- když cyklus otevřu a na jeden konec napojím $\{u,v\}$, dostanu delší graf než maximální dlouhý



③ $\forall u \in V: u \in T$: Sporem:



$-\{r,s\}$ jsem tam mohl přidat a T by bylo delší

zvolíme $u \notin T$, $v \in T$, P cesta mezi u, v.

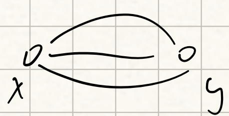
Najdeme r, s sousední na P t.ž. $r \in T$, $s \notin T$

Tah T rozpojíme v r a připojíme $\{r,s\}$ $\boxed{\lightning}$ — opět jsem pak měl delší.

Otevřený eul. tah $\equiv$

souvislý & právě dva vrcholy mají lichý stupeň.

Multigraf:



E libovolná konečná množina, „abstraktní hrany"

$end: E \to \binom{V}{2} \cup V$

- pozor = ve smyčce každá hrana přidá vrcholu stupeň $+2$.

Orientovaný graf:

$E \subseteq V^2 \setminus \underbrace{\{(x,x) \mid x \in V\}}_{\Delta_V} \iff$ ireflexivní relace na V

Vstupní / Výstupní stupeň vrcholu:

$deg^{in}(v)$ – počet hran, co přichází

$deg^{out}(v)$ – počet hran, co odchází

$\sum_v deg^{in}(v) = \sum_v deg^{out}(v) = |E|$

Zorientování grafu

– z neorientovaného udělám orientovaný, žádné nové hrany nepřidávám.

Podkladový graf G^o pro orientovaný G:

$$V(G^o) := V(G)$$

$$E(G^o) := \{\{u,v\} \mid (u,v) \in E(G) \vee (v,u) \in E(G)\}$$

Orientovaný graf G je souvislý:

slabě $\equiv$ G^o je souvislý („drží pohromadě")

silně $\equiv$ $\forall u,v \in V(G)\ \exists$ cesta v G z u do v.

Graf G je vyvážený $\equiv$ $\forall v \in V(G): \deg^{in}(v) = \deg^{out}(v)$

22

Pro orientovaný graf G je ekvivalentní:

1. G je vyvážený a slabě souvislý
2. G je eulerovský
3. G je vyvážený a silně souvislý

Důkaz: kruhem

3 => 1 Silná souvislost je silnější než slabá a tedy obsahuje i slabou.

2 => 3 Z každého vrcholu existuje cesta, je uzavřený.

1 => 2 Jakmile má stejný $\deg^{in/out}$, musím se dostat všude a takový tah bude nejdelší.

Strom je souvislý acyklický graf

Les je acyklický graf

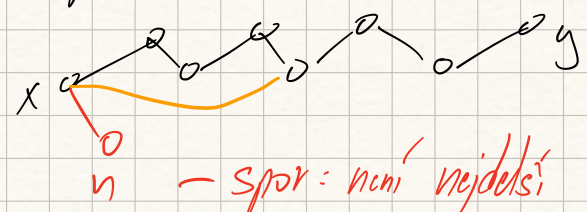
List je vrchol stupně 1

Lemma o koncovém vrcholu:

Strom o alespoň dvou vrcholech má alespoň 2 listy.

Dk:
Uvažme nejdelší cestu C

→ x, y jsou listy. Kdyby nebyli, mají stupeň větší než jeden, tedy do nich vede další hrana $\boxed{↯}$

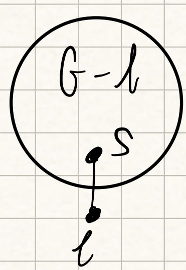


— spor: není nejdelší

— spor: existuje cyklus, není strom

Lemma: Nechť l je list grafu G. Pak G je strom $\Leftrightarrow$ $G - l$ je strom

Dk: $\Rightarrow$



1) $G - l$ je souvislý

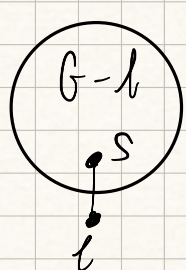
- pokud l není x, y, pak nebyla porušena cesta, jelikož l je list, tedy má $\deg(l) = 1$.

$\forall x, y \ \exists$ cesta mezi x, y v G.

2) $G - l$ je acyklický

- pokud $C_c \subseteq G - l$, pak $C_c \subseteq G$

$\Leftarrow$



1) G je souvislý

pro $x, y \neq l$ stále propojeny cestou

x, l: ze souvislosti $G - l$ existuje cesta mezi x, s. Tedy existuje i v G. Přidáním hrany s, l vznikne cesta mezi x, l

2) G je acyklický

- jelikož l je list, tak neleží na kružnici.
- pokud $C_c \subseteq G$, pak $C_c \subseteq G - l$.

(pokud, tak už tam byla)

Strom na n-vrcholech má n-1 hran.

Dk: indukcí podle n:

1. $n = 1$

   o
   1

   $E(G) = 0$

2. $n \to n+1$

Nechť T je strom, kde $|V(T)| = n+1$ ≥ 2

$\Rightarrow$ lemma 1: Strom o alespoň 2 vrcholech má alespoň dva listy.

$\Rightarrow$ je to takový strom

$\Rightarrow$ lemma 2: Nechť T je strom, pak $T - l$ je taky strom

$\Rightarrow$ $T - l$ je taky strom (n vrcholů)

$\Rightarrow$ IP: $T - l$ má $n-1$ hran

$\Rightarrow$ pak T má n hran $\boxed{\checkmark}$

Charakterizace stromů:

Pro graf G jsou následující ekvivalentní

1. G je souvislý a acyklický — Je to strom.
2. G je souvislý a $|E(G)| = |V(G)| - 1$ — Eulerova formule
3. $\forall x, y \in V(G)$ $\exists!$ cesta v G mezi x, y — Jednoznačná souvislost
4. G je souvislý & $\forall e \in E(G)$: $G - e$ je nesouvislý — Minimální souvislost
5. G je acyklický & $\forall e \in \binom{V(G)}{2} \setminus E(G)$: $G + e$ obsahuje kružnici. — Maximální acykličnost

1 $\Rightarrow$ 2

Viz: Strom na n-vrcholech má n-1 hran.

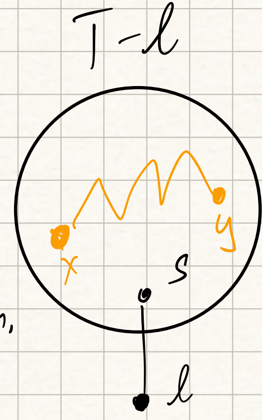
① => ③ Indukcí podle n:

$\forall n\ \forall G$ o n vrcholech ① => ③

1) $n=1$ – strom o 1 vrcholu má právě žádnou cestu a ta je triviálně jednoznačná

2) $n \to n+1$

Buď T strom s $n+1$ vrcholy a l jeho list



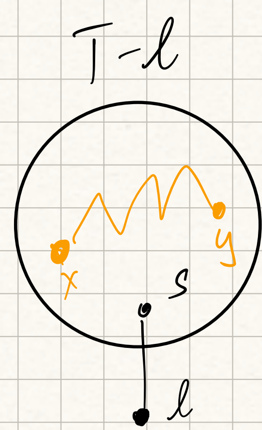
$x,y \neq l$ – $T-l$ je podle předpokladu souvislý acyklický strom.
– V $T-l$ existuje právě jedna cesta mezi x,y.
Přidáním listu do grafu tu cestu nemůžu porušit.

x,l : $\exists$ bijekce mezi x,l cestami v T a x,s cestami v $T-l$.
– V $T-l$ podle IP existuje pouze jedna cesta, pak v T taky.

① => ④ Indukcí podle n:

$n=1$ triviálně platí.

$n \to n+1$ protože když $T-l$ je strom, pak T je strom

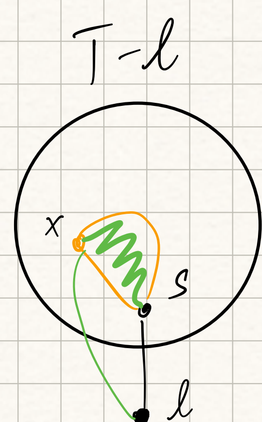


T souvislé je, protože to je strom.
– pokud smažu s,l, tak l bude izolovaný a T není souvislé.
– pokud rozpojím něco mimo s,l (tedy x,y), tak hranou s,l to nespojím, protože l není uvnitř žádné cesty.

① => ⑤ Indukcí podle n:

$n=1$ triviálně platí

$n \to n+1$



Přidám hranu   Pokud se l neúčastní, vznikne v $T-l$ kružnice, jelikož je $T-l$ podle IP maximálně acyklický.
Pokud se l účastní, už existovala nějaká cesta z x do s, takže vznikla kružnice.

③ => ① $\neg 1 \Rightarrow \neg 3$:

T není strom

nesouvislý	cyklický
x,y: 0 cest	x,y: ≥ 2 cesty ✓

④ => ① $\neg 1 \Rightarrow \neg 4$:

T není strom

nesouvislý	cyklický
pak není ani minimální souvislý	pokud smažu hranu z kružnice, furt je graf souvislý ✓

⑤ => ① $\neg 1 \Rightarrow \neg 5$:

T není strom

nesouvislý	cyklický
	pak nemůže být jakkoliv acyklický

- jestli byl nesouvislý, tak hrana x,y nemohla vytvořit cyklus, jinak by už předtím existovala hrana, tedy by nebylo nesouvislé, resp. nebylo maximálně acyklické.

② => ①

Lemma: Pokud G je souvislý, má n vrcholů a $n-1$ hran a $|V(G)| \geq 2$, pak G má list.

→ nemůže tam být nula, protože je souvislý

$$\sum_{v \in V(G)} \underbrace{\deg_G(v)}_{\geq 1} = 2\underbrace{|E(G)|}_{n-1} = 2n-2$$

→ Kdyby byly všechny stupně dva, byl by součet pouze $2n$. Díky „-2" víme, že tam je i list. ↯

Indukce podle n:

$n=1$ – Graf na jednom vrcholu je strom

$n \to n+1$

Buď T graf splňující ② na $n+1$ vrcholech.

Podle lemma $\exists\, \ell$ list v T. $T-\ell$ splňuje ② $\overset{IP}{\Rightarrow}$ $T-\ell$ je strom.

$\Rightarrow$ T je pak taky strom

Kostra grafu G je podgraf T takový:

- T je strom
- $V(G) = V(T)$

Graf má kostru $\Leftrightarrow$ G je souvislý

Nechť T je kostra grafu G.

$\Rightarrow$ $V(G) = V(T)$, přičemž T je souvislý. Pak i G je souvislý.

$\Leftarrow$ Máme-li souvislý cyklický G, můžeme tak dlouho odebírat „cyklické hrany", až získáme acyklický souvislý graf.

Rovinné kreslení grafů

Oblouk v rovině je:

$f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$

prostá & spojitá

Krajní body: f_0, f_1

Topologická kružnice:

Stejná jako oblouk,

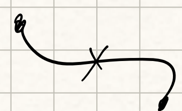
jen $f(0) = f(1)$

Nakreslení grafu do roviny:

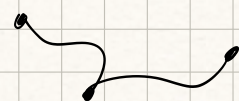
- $b(v) \in \mathbb{R}^2$ je nakreslení vrcholu v do roviny.

  $V \to \mathbb{R}^2$ je prostá

- $\sigma(e)$ je oblouk – nakreslení hrany $e = \{x, y\}$
- pokud $b(v) \in \sigma(e)$, pak $v \in e$



- pokud $x \in \sigma(e) \cap \sigma(f)$, pak $x = b(v)$ pro $v = e \cap f$



Graf je rovinný $\equiv$

má alespoň jedno nakreslení do roviny

Topologický graf $\equiv$ **graf + nakreslení**

$\sim$ relace na $M \subseteq \mathbb{R}^2$:

$x \sim y \equiv \exists$ oblouk v M

s krajními body x, y

je ekvivalence

$\hookrightarrow$ ekv. třídy: komponenty obloukové souvislosti

Stěna nakreslení:

Komponenta obloukové souvislosti

množiny $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{e \in E(G)} \sigma(e)$

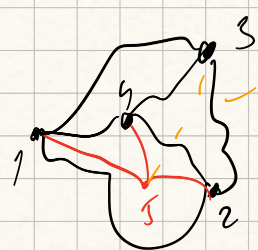
tedy bez těch hran

$\forall n$ P_n je rovinný

$\forall n$ C_n je rovinný

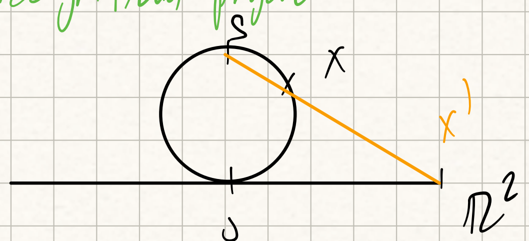
Stromy jsou rovinné

K_5 není rovinný!



nesmím protnout nic, takže nejde

Stereografická projekce:



$f: \sigma \setminus \{S\} \to \mathbb{R}^2$

spojitá bijekce

Kreslení na sféru <=> kreslení do roviny <=> kreslení $[0,1]^2$

Vnější stěnu lze zvolit.

kreslení na válcovou plochu

G je rovinný => G%e je rovinný

G/e je rovinný

$H \subseteq G$, H není rovinný => G není rovinný

Jordanova věta o kružnici.

Nechť c je topologická kružnice v $\mathbb{R}^2$. Potom $\mathbb{R}^2 \setminus c$ má právě dvě komponenty obloukové souvislosti (omezenou/neomezenou) jejichž společnou hranicí je c.

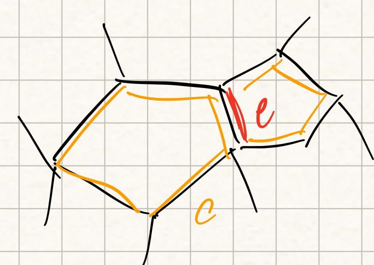
V souvislém topologickém grafu je hranice každé stěny nakreslením uzavřeného sledu.

Důkaz: 1) pro stromy:

„obejdeme strom v nakreslení dokola"

2) Indukcí podle $|E|$ (strom má minimum hran na vrcholech, budu přidávat)

Buď e hrana na kružnici c.



- na obou stranách e musí být jiné stěny (h.o.s)
- když smažu e, spojí se mi stěny a použiju IP, tedy že hranice té nové stěny je uzavřený sled
- pak když tam e vrátím, tak jednoznačně rozdělím ty dvě stěny a můžu takhle označovat sledy.

– kdykoliv je v grafu K_5, není graf rovinný

H není rovinný $\Rightarrow$ $H \% e$ není rovinný

(Kuratowského)

G není rovinný $\Leftrightarrow \exists H \subseteq G$ t.ž.

H je isomorfní nějakému dělení K_5 nebo $K_{3,3}$

Eulerova věta:

V souvislém topologickém grafu platí:

$$v + f = e + 2$$

$|V|$ — v, #stěn — f, $|E|$ — e

Počet stěn je funkcí hran a vrcholů, nezáleží na nakreslení.

Důkaz: Podle počtu hran:

1) Graf je strom = ✓
2) (Souvislý a není strom) Nechť G je cyklický, $h :=$ hrana na kružnici

$G' = G - h$ ... stále souvislý

$v' = v$

$e' = e - 1$ → takže je strom z IP

$f' = f - 1$

→ podle IP $v' + f' = e' + 2$

$v + f - 1 = e - 1 + 2$

$v + f = e + 2$ ✓

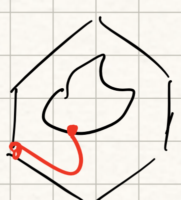
Maximální rovinný graf:

Takový graf G, kde G je rovinný a $G + h$ není rovinný: $\forall h \in \binom{V}{2} \setminus E$

Každý maximální rovinný graf s počtem vrcholů ≥ 3 je triangulace

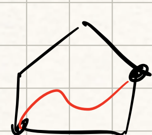
→ všechny stěny jsou trojúhelníky

Důkaz: ① Kdyby G nebyl souvislý



- Pokud je rovinný a má více komponent, existují vrcholy na hranicích stěny, mezi kterými můžu vést oblouk. ↯
- takže bude existovat hranice stěny nakreslení nějakým sledem.

② Nechť S je hranice stěny $\neq \triangle$



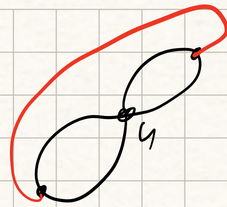
a) S je kružnice délky > 3

- musí tam existovat nespojení vrcholy, tedy graf nebyl maximální ↯

5) v S se opakuje nějaký vrchol u.

pak existují $r, y \neq u$,

které mohu spojit, tudíž není maximální



Eulerova formule a triangulace:

$$3f = 2e \to f = \frac{2}{3}e$$

$$v + \frac{2}{3}e = e + 2$$

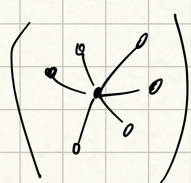
$$e = 3v - 6$$

→ V maximálním rovinném grafu je $e = 3v - 6$, s alespoň 3 vrcholi.

V rovinném grafu s alespoň 3 vrcholi je $e \leq 3v - 6$

Rovinné grafy bez Δ:

max r. g bez Δ — stěny C_4, C_5



$$\Downarrow$$

$$4f \leq 2e$$

$$f \leq \frac{1}{2}e$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{e \leq 2v - 4}}$$

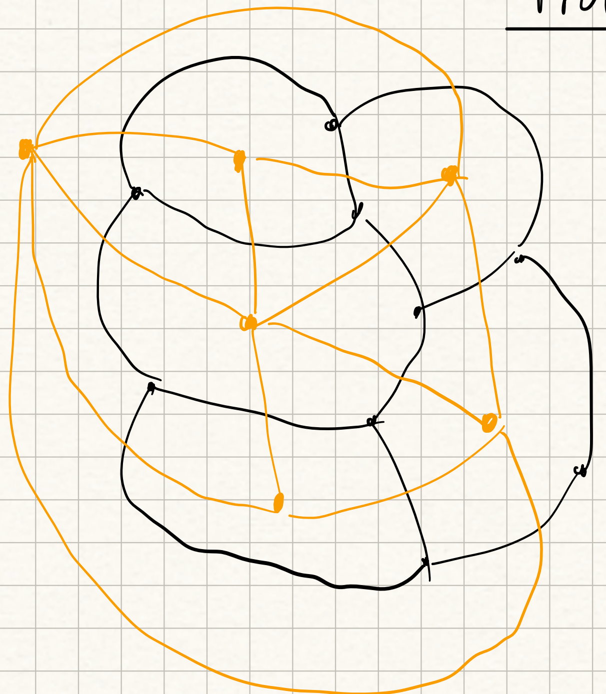
→ Průměrný deg$(-) < 4$, tedy existuje vrchol stupně ≤ 3.

V každém rovinném grafu je avg$(\deg(-)) < 6$

$$\frac{\sum_u \deg(u)}{v} = \frac{2e}{v} \leq \frac{6v - 12}{v} < 6$$

→ V rovinném grafu existuje vrchol, jehož stupeň je ≤ 5.

Problém 4 barev



Konstrukce duálního grafu

- rovinný topologický multigraf
- $V(G^*) :=$ stěny (G)
- $\{s_1, s_2\} \in E(G^*) \equiv s_1, s_2$ mají v G spol. hranu.

Je-li G souvislý rovinný multigraf, pak $(G^*)^* \cong G$

Obarvení grafu k-barvami (k-obarvení) je:

$c: V(G) \to \{1 \_ k\}$ t.ž. $\forall u,v \in V(G): \{u,v\} \in E(G) \Rightarrow c(u) \neq c(v)$

Barevnost grafu $\chi(G)$ grafu G je:

$\min\{k \mid G \text{ je } k\text{-obarvitelný}\}$

$\exists$ 1-obarvení $\Leftrightarrow E(G) = \emptyset$

$\chi(P_n) = 2$ pro $n \geq 1$

$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{pro sudé} \\ 3 & \text{pro liché} \end{cases}$

$\chi(K_n) = n$

Pokud $H \subseteq G \Rightarrow \chi(H) \leq \chi(G)$

Klikovost $\omega(G)$

$\max\{k \mid \exists H' \subseteq G : H \cong K_k\}$

Barevnost grafu $\geq$ Klikovost grafu

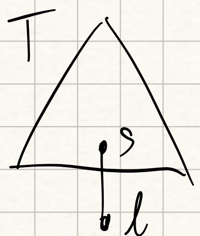
Stromy mají $\chi \leq 2$

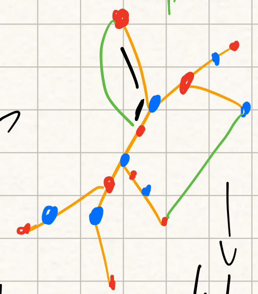
Každý strom je 2-obarvitelný:

Důkaz: indukcí $n = 1 \to$ barva 1.

- obarvím pomocí IP

$T' := T - \ell$





Co když spojuje stejné barvy.

pokud spojuje jiné barvy, je to OK.

Cesta po kostře grafu musí mít sudou délku, aby se mohly střídat barvy --> to ale nenastane, jelikož sudá cesta + naše hrana tvoří kružnici liché délky. $\boxed{\checkmark}$

G je bipartitní $\iff \chi(G) \leq 2$

$\chi(G) \leq 2 \iff G$ neobsahuje lichou kružnici

Důkaz: $\Rightarrow$ lichá kružnice má $\chi \geq 3$

$\Leftarrow$ nesouvislý barvím po komponentách zvlášť.

--> kostra je strom
— tedy 2-obarvitelná

Nechť T je kostra grafu/komponenty a $c: V(T) \to \{1,2\}$ je obarvením T.

Proto c je obarvením celého G.

Pro G rovinný je $\chi(G) \leq 6$.

Indukcí: podle n

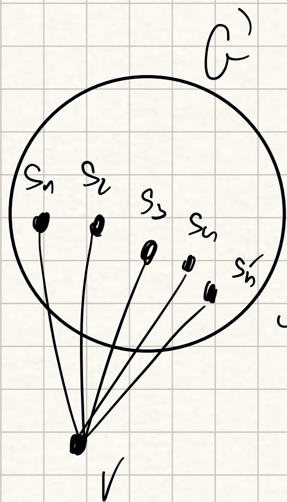
1. $n = 1$ ✓
2. $n \to n+1$

v: $\deg(v) \leq 5$

$G' := G - v$

↳ podle IP $\exists c$ obarvení G' 6 barvami

- v má 5 sousedů, takže zbyde barva i pro v.

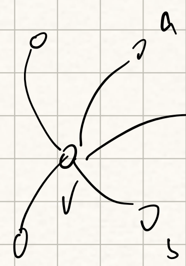


--> tyto jsou obarvené, ale je jich jen 5.

Pro G rovinný je $\chi(G) \leq 5$

Důkaz:

Stejná indukce jako pro ≤ 6, ale zajistím, že 5 předchozích bude obarvených 4 barvami.



① $\exists a, b$ sousedí v: t. ž. $a \neq b$ a $\{a, b\} \notin E$

↳ kdyby pro každé dva vrcholy existovala hrana, byly by součástí K_5 a to není rovinná.

② $G' := G - v + \{a, b\}$ – to zachovává rovinnost

③ $G'' := G' / \{a, b\}$ – rovinný

④ Podle IP na G'' $\exists$ 5-obarvení c''

⑤ vyrobím c' obarvení $G' - v$: $c'(u) = \begin{cases} c''(u) & \text{pro } u \neq a, b \\ c''(x) & \text{pro } u = a, b \end{cases}$

↳ vrchol, který se slil z a, b

⑥ v má 5 sousedů, ale obarvené 4 barvami – volná barva

Teorie pravděpodobnosti

Pravděpodobnostní prostor

Obsahuje:

Ω - množina el. jevů

$\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ množina jevů

$P : \mathcal{F} \to [0,1]$ pravděpodobnost

→ Konečný / klasický

Ω je konečná

Ω je konečná a vůči jevům symetrická:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Diskrétní p.p.

Obsahuje:

Ω - konečná / spočetná množina

$\mathcal{F} = 2^{\Omega}$

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$$

$$P(\Omega) = 1$$

Tedy $P(\emptyset) = 0$

$A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

když $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$

① Mince $\{0,1\}$

$P(\{0,1\}) = 1$

$P(\emptyset) = 0$

② Kostka $\Omega = \{1, \dots, 6\}$

$P(\{2,4,6\}) = \frac{1}{2}$

$P(\{2,3,5\}) = \frac{1}{2}$

Podmíněná pravděpodobnost:

Pro A, B jevy t. ž. $P(B) \neq 0$

$$P[A|B] := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

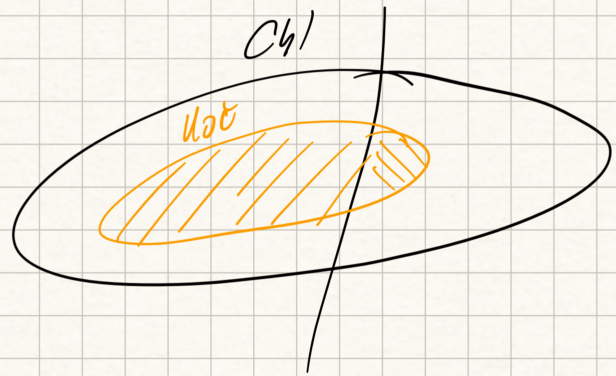
(A za podmínky B)

$$P[A|B] = P[B|A] \cdot \frac{P(A)}{P(B)}$$

$P[Kač \mid Chl] = 0{,}5$

$P[Kač \mid \overline{Chl}] = 0{,}001$

$P[Chl] = 0{,}9$



$P[Kač] = \ldots + \ldots$

$P[Kač \cap Chl] = P[Kač \mid Chl] \cdot P[Chl]$

$P[Kač \cap \overline{Chl}] = P[Kač \mid \overline{Chl}] \cdot P[\overline{Chl}]$

Věta o úplné pravděpodobnosti:

Pro A jev:

$B_1 \ldots B_n$ rozklad Ω t.ž. $\forall i: P(B_i) \neq 0$

Platí:

$$P(A) = \sum_i P[A \mid B_i] \cdot P(B_i)$$

Příklad epidemiologický:

$T := [\text{má pozitivní test}]$ $\quad P[T \mid N] = 0{,}95$

$N := [\text{je nemocný}]$ $\quad P[T \mid \bar{N}] = 0{,}03$

$P(N) = 0{,}06$ $\quad 0{,}001$

$P[N \mid T] = ? = P[T \mid N] \cdot \dfrac{P(N)}{P(T)} = 0{,}67$

$0{,}0309$

$P(T) = P[T \mid N] \cdot P(N) + P[T \mid \bar{N}] \cdot P(\bar{N}) = 0{,}0852$

$0{,}0307$

Bayesova věta:

Pro $A \subseteq \Omega$, $B_1 \ldots B_n$ rozklad Ω t.ž. $\forall_i\ P(B_i) \neq 0$

$$P[B_i \mid A] = \frac{P[A \mid B_i] \cdot P(B_i)}{\underbrace{\sum_j P[A \mid B_j] \cdot P(B_j)}_{P(A)}}$$

Nezávislost jevů:

Jevy A, B jsou nezávislé $\equiv P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \iff P[A \mid B] = P(A)$

$\Omega = \{1 \ldots 6\}$ s klasickou P

$A := [\text{sudé číslo}] = \frac{1}{2}$

$B := [\text{číslo} > 2] = \frac{2}{3}$

$C := [\text{prvočíslo}] = \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$P(A \cap C) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Jevy $A_1 \ldots A_n$ jsou:

1. Po 2 nezávislé $\equiv \forall_{i,j} : i \neq j : P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$
2. nezávislé $\equiv \forall I \subseteq [n], I \neq \emptyset : P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$

Příklad $\{0,1\}^4$ s kl. P.

$A := [11**]$ $\quad P(A) = \frac{1}{4}$ $\quad P(A \cap B) = \frac{1}{16} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$

$B := [**11]$ $\quad P(B) = \frac{1}{4}$ $\quad P(A \cap C) = \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$

$C := [\text{sudý } \#1]$ $\quad P(C) = \frac{1}{2}$ $\quad P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{16} \neq \frac{1}{32}$

Příklad permutací: Ω permutace na $[32]$

$A := [\pi(1) = 1]$ $\quad P(A) = \frac{1}{32}$, $P(B) = \frac{1}{32}$, $P(A \cap B) = \frac{30!}{32!} \neq \frac{1}{32^2}$

$B := [\pi(2) = 2]$ $\quad P[B|A] = \frac{1}{31}$

Náhodní veličina je:

funkce z $\Omega \to \mathbb{R}$

$P[\underbrace{\#\text{pevných bodů} = 0}_{\text{jev}}]$

Střední hodnota náhodné veličiny x je:

$$E[X] := \sum_{w \in \Omega} X(w) \cdot P(\{w\})$$ → v klasickém p.p. je to obyč. průměr

$E[\#\text{ok na kostce}] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \dots 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5$

Věta o linearitě střední hodnoty:

$\forall A, B$ náhodní veličiny, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:

$E[A+B] = E[A] + E[B]$

$E[\alpha A] = \alpha E[A]$

$\{1 \_ 6\}^n$, $E[S]$
↳ #sudých hodů

$S_1 \_ S_n$! $S_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ na i-té pozici je sudé číslo → indikátor

$S = \sum_i S_i \quad = P(\text{i-té sudé}) = \frac{1}{2}$

$E[S_i] = \frac{1}{2}$

↳ $i = \frac{n}{2}$