Kontrakce hrany: $G \setminus e$:

$$V' = (V \setminus \{x, y\}) \cup \{t\}$$

$$E' = \left(E \cap \binom{V'}{2}\right) \cup \{\{v, t\} \mid v \in V \,\&\, (\{v, x\} \in E \vee \{v, y\} \in E) \,\&\, v \neq x, y\}$$

PIE:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$

sjednocení všech množin

střídavé znaménko

průnik jednotlivých podmnožin

Důkaz:

Porovnáme, kolik přispěje vlevo a vpravo.

Vlevo => 1

Vpravo:

Nechť prvek p je v p podmnožinách A_i

průnik k-tic: $k > p = \emptyset$; $k = p = \binom{p}{p} = 1$; $k < p = (-1)^{k+1} \cdot \binom{p}{k}$

Napravo tedy přispěje: $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \binom{p}{k}$

$$= \binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \binom{p}{3} - \binom{p}{4} + \ldots - \ldots + (-1)^{k+1} \cdot \binom{p}{p} = *$$

Binomická věta: $0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{p}{k} = \binom{p}{0} - \binom{p}{1} + \binom{p}{2} - \ldots + \ldots + (-1)^k \cdot \binom{p}{p}$

$1 - * = 0 \qquad \underline{* = 1}$

$$i \cdot (n - i + 1) =$$

$i = 1$	$i = n$	$i \neq 1, n$
$\parallel$	$\parallel$	$\parallel$
n	n	$\min \geq 2$
		$\max\ 2\frac{n}{2}$

Dokažte Eulerovu větu:

Graf G je Eulerovský $\iff$ Graf G je souvislý & $\forall v \in V(G)$: $\deg_G(v)$ je sudý;

Eulerovský

uzavřený souvislý tah

$\Rightarrow$ ① G je souvislý

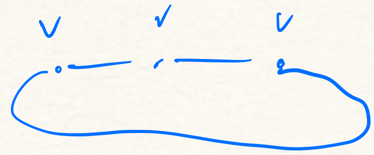
T je sled grafu G mezi u,v. To musí existovat, jelikož je Eulerovský.

Pak tedy existuje i cesta mezi u,v a G je souvislý.

$\Rightarrow$ ② $\forall v$ jsou stupněm sudé:

Pokud se žádný vrchol neopakuje, pak triviálně platí (v kružnici musí být všechny stupně sudé)

Jinak:

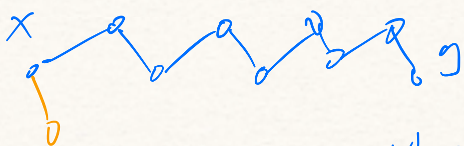


Mezi každým výskytem „v" musí vést hrana do jiného jiného vrcholu, jelikož by to byla jinak smyčka a ty jsou v definici grafu zakázané.

$\Leftarrow$ G je souvislý

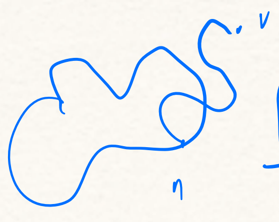
Nechť T je nejdelší tah $\rightarrow$ tedy potenciálně Eulerovský uzavřený tah se všemi vrcholy a hranami

① Nechť je otevřený



– pak stupeň vrcholu musí být 2, tedy do něj musí vést vždy dvě hrany, takže ji můžu přidat a to je spor s maximalitou!

② Nechť neobsahuje všechny vrcholy:

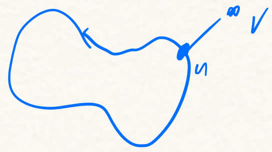


Nechť $\forall v \in T$. Nechť P je cesta mezi u,v.

Pak najdeme r,s takové že $r \in T$, $s \notin T$.

Takovou hranu $\{r,s\}$ můžu připojit k T a to je spor s maximalitou!

③ Nechť neobsahuje všechny hrany:



Nechť $u, v \in V(T)$, $\{u,v\} \notin E(T)$
Pak můžu u vrcholu „u" cyklus rozpojit a připojit k tomu $\{u,v\}$, což je spor s maximalitou eul. tahu.

Pro graf G je ekvivalentní:

① Graf je vyvážený a slabě souvislý

② Graf je Eulerovský

③ Graf je vyvážený a silně souvislý

③ => ①

Když je silný bude i slabý

① => ②

Pokud je slabě souvislý a vyvážený, existuje tah T, kterým se dostanu mezi všechny vrcholy – vyváženost zaručí, že žádná část tahu se neztratí a slabá souvislost zajišťuje, že žádný vrchol není izolovaný.

② => ③

Vychází z definice Eul. tahu, který projde každý vrchol a hranu s tím, že hrany neopakuje a vrátí se na začátek. Je to tah $T \cong C_n$, kde všechny vrcholy mají sudý stupeň

Nechť l je list grafu G. Pak G je strom $\Leftrightarrow$ $G - l$ je strom.

$\Rightarrow$ (1) G je souvislý $\Rightarrow$ $G - l$ je souvislý

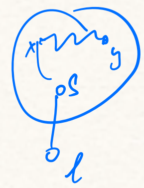
Jelikož l je list se stupněm 1, může být pouze na kraji cesty x, y, tedy když l odebereme, neporušíme souvislost zbylé cesty.

(2) G je acyklický $\Rightarrow$ $G - l$ je acyklický

$C_c \subseteq G - l \Rightarrow C_n \subseteq G$

tedy aby existoval cyklus v $G - l$, musí existovat i v G

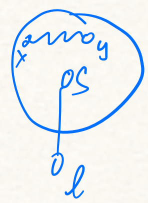
$\Leftarrow$ (1) $G - l$ je souvislý $\Rightarrow$ G je souvislý



Musí existovat cesta mezi x, s v $G - l$.

Pak v G existuje z tranzitivity cesta mezi x, l

(2) $G - l$ je acyklický $\Rightarrow$ G je acyklický



Jelikož je l list, nemůže ležet na kružnici a tím pádem jeho přidáním nevytvoříme cyklus.

Strom o n vrcholech má $n-1$ hran

Indukcí: $n=1$ ✓

$n \to n+1$

Nechť T je strom: $|V(T)| \geq 2$ (alespoň 2)

=> Podle lemma „Strom o alespoň dvou vrcholech má alespoň 2 listy."

-> Je to tedy strom

=> Podle lemma G je strom $\iff$ $G - \ell$ je strom

$G - \ell$ je strom podle I.P. Pak G je taky strom. $\boxed{✓}$

má $n-1$ hran . . . má n hran

Charakterizace stromů:

1) Je to strom -> souvislý a acyklický
2) Je souvislý a $|E(G)| = |V(G)| - 1$
3) Je jednoznačně souvislý: $\forall x, y \in V(G) : \exists!$ cesta mezi x, y
4) Je minimálně souvislý: $\forall e \in E(G) : G - e$ je nesouvislý
5) Je maximálně acyklický: $\forall e \in \binom{V(G)}{2} \setminus E(G) : G + e$ je cyklický

1 => 2

Strom o n vrcholech má $n-1$ hran...

1 => 3

Indukcí: $n=1$ ✓ Strom o jednom vrcholu má právě jednoznačně 0 hran.

$n \to n+1$:

$x, y \neq \ell$ Nechť T je strom (s $n+1$ vrcholy). Pak v $T - \ell$ existuje jednoznačná cesta mezi x, y. Přidáním listu tuto cestu nemůžu porušit.

x, l $\quad \exists$ bijekce mezi x, l v T a x, s v $T - l$.

↳ je to prakticky ta stejná cesta. Přidáním listu l cestě neporuším jednoznačnost takové cesty.

① => ④ Indukcí podle n:

$n = 2 \to$ o—o a odeberu hranu, už není souvislý

$n \to n+1$

Nechť T je strom s $n+1$ vrcholy a l jeho list.

T musí být souvislý, protože to je strom. Pokud odeberu $\{s, l\}$, tak l bude izolovaný a graf není souvislý.

Pokud odstraním hranu mimo $\{s, l\}$, tak hranou $\{s, l\}$ to nespojím.

① => ⑤ Indukcí podle n:

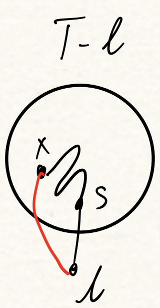
$n = 1$ platí triviálně

$n \to n+1$

Nechť T je strom s $n+1$ vrcholy a listem l.

Do $T - l$ přidám hranu. Pokud se l neúčastní hrany, vznikne v $T - l$ cyklus, jelikož $T - l$ je z IP maximálně acyklický.

Pokud se l účastní, tak bych vytvořil cyklus, viz. obrázek:



③ => ①: $\neg 1 \Rightarrow \neg 3$

T není strom

- nesouvislý: neexistuje cesta mezi x, y
- cyklický: ≥ 2 cesty mezi x, y

(4) => (1) : $\neg 1 \Rightarrow \neg 4$

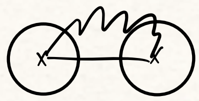
T není strom

nesouvislý | cyklický
pak není ani minimálně souvislý | odebráním hrany z cyklu neporuším souvislost

(5) => (1) : $\neg 1 = \neg 5$

T není strom

nesouvislý | cyklický
pak rozhodně není acyklický



- spojením dvou nesouvislých částí bych nevytvořil cyklus, jelikož pak by nemohly být nesouvislé.

(2) => (1)

Lemma: Pokud je G souvislý, má $n \geq 2$ vrcholů a $n-1$, pak obsahuje list.

$$\sum_{v \in V(G)} \deg_G(v) = 2E \Rightarrow 2n-2$$

→ To indikuje, že některé vrcholy nemají sudý stupeň, tedy v případě stromu mají stupeň 1.

Indukcí podle n:

$n=1$ Triviální platí.

$n \to n+1$ Nechť T je strom o $\overset{\geq 2}{n+1}$ vrcholech. → splňuje tedy lemma a má list.

$T-l$ splňuje podle IP (2) a je tedy stromem.

Pak je i podle lemma výše i T stromem.

Eulerova věta:

V topologickém grafu platí:

$v + f = e + 2$, kde v je počet vrcholů, f počet stěn a e počet hran

1) Graf je strom: $v + f = v - 1 + 2$

$f = 1$ ✓ Platí

2) Indukcí podle e pro nestromy: (musí být souvislý)

$e = 0$

$1 + 1 = 2$ ✓

$n \to n + 1$

Nechť je G cyklický a h jeho hrana na kružnici

Pak $G' := G - h$, tedy stále souvislý

$v' = v$

$e' = e - 1$

$f' = f - 1$

$\to v + f - 1 = e - 1 + 2$

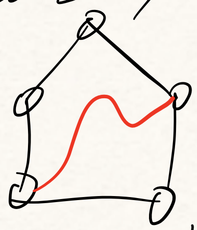
$v + f = e + 2$ ✓

Každý maximální topologický graf G s $|V(G)| \geq 3$ je triangulace.

① Nechť G není souvislý: pak jednoznačně existuje cesta mezi komponentami souvislosti. ↯

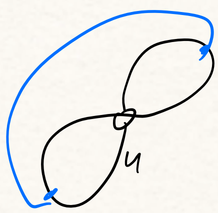
② Nechť je G souvislý a hranice stěny $\neq \triangle$

a) Mám kružnici $C_{n>3}$:



- tam však existuje nakreslení oblouku, takže nebyl maximální ↯

b) Kružnice je délky ≤ 3



Pak ale musí existovat body x, y, které mohu spojit a dostanu triangulaci a ke všemu je to spor s maximalitou!

Barevnost grafu $\leq 2 \iff G$ je bipartitní $\iff$ neobsahuje lichou kružnici

$\Rightarrow$ Lichá kružnice má $\chi \geq 3$

$\Leftarrow$ Nechť T je kostra grafu/komponenty

- T je strom
- ten lze 2-obarvit

- Postupně do kostry přidávám hrany.
- Jakmile bych měl hranu, co spojuje stejné barvy, tak je to spor se sudostí kružnice, protože stejnou barvu bude mít sudé sudé délky, tedy kružnice bude

lioh..!

Rovinný graf je 6-obarvitelný:

Jelikož v rovinném grafu existuje vrchol $v: deg_G(v) = 5$

$\sum_{v \in V} deg(v) = 2e = 6v-12$

$e = 3v-6$

≤ 6 ?

$n=1$ triviální platí

$n \rightarrow n+1$

Nechť G je graf s $n+1$ vrcholy.

$G' := G - v \rightarrow$ takový graf z předpokladu lze obarvit.

Zaručeně mi zbyde 1 barva, kterou obarvím v, jelikož v má právě 6 sousedů.

Rovinný graf je 5-obarvitelný:

1) $\exists\, a, b$ sousedé, kteří nejsou spojeni hranou – jinak by to bylo K_5

2) $G' := G - v + \{a, b\}$ zachová rovinnost

3) $G'' := G / \{a, b\}$ stále rovinné

4) G'' lze podle IP c'' 5-obarvit

5) c' obarvení $G-v$: $c'(v) = \begin{cases} c''(u) : u \neq a,b \\ c''(x) : u = a,b \end{cases}$

6) c obarvení na G lze provést, jelikož mám 6 vrcholů obarvených, ale stále mi zbyla barva pro v.

Indukcí podle $|E|$

$|E| = 1$ ✓

$|E| \rightarrow |E|+1$

Bayesova věta:

Pro $A \subseteq \Omega$, $B_1 \ldots B_n$ rozklad Ω t.ž. $\forall i : P(B_i) \neq \emptyset$

$$P[B_i / A] = \frac{P[A|B_i] \cdot P[B_i]}{\sum_j P[A|B_j] \cdot P[B_j]}$$

$P(A)$